

# Skript - Mechanische Schwingungen

Autor: Norbert Marxer

Erstellung: 30.06.2025 (Version 1)

---

## Inhaltsangabe

### Inhaltsverzeichnis

Inhaltsangabe	1
Inhaltsverzeichnis	1
Allgemein	3
Freie ungedämpfte Schwingung ( $\omega_0$ )	3
Freie gedämpfte Schwingung ( $\omega_d$ )	5
Erzwungene gedämpfte Schwingung	5
Eigenfrequenzen verschiedener harmonischer Schwingungen	6
Mathematik	7
Experimente	7
Freie ungedämpfte Schwingung ( $\omega_0$ )	8
Harmonische Schwingungen	8
Anharmonische Schwingungen	12
Freie gedämpfte Schwingung ( $\omega_d$ )	13
Einleitung	13
Allgemeine und spezielle Lösungen	14
Ungedämpfte Schwingung $\delta = 0$	14
Gedämpfte Schwingung $0 < \delta < \omega_0$	14
Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$	15
Kriechfall $\delta > \omega_0$	15
Gegenüberstellung der vier Schwingungstypen	16
Erzwungene gedämpfte Schwingung	17
Differentialgleichung	17
Lösungen	17
Frequenz	17
Amplitude (Resonanz)	18
Phasenverschiebung	19
Eigenfrequenzen verschiedener harmonischer Schwingungen	20
Einleitung	20
Horizontaler und Vertikaler Masse-Feder-Schwinger	20
Drehpendel (Torsionspendel)	23
Mathematisches Pendel (Fadenpendel)	25
Physikalisches Pendel	29
Flüssigkeitsschwingung (Wasserpendel)	30

<b>Anhang</b>		31
Anhang A	Experimente	32
	Fadenpendel	32
	Chaotisches Pendel	34
	Energieübertragung bei Schwingungen	34
	Unterputzröhre	35
	Überlagerung	36
Anhang B	Quellen	37
Anhang C	Kriechfall (Sinh und Cosh)	38
	Einleitung	38
	Sinh und Cosh	38
Anhang D	$\sin[\varepsilon]$ für kleine Winkel	41
Anhang E	Schwingungsdifferentialgleichung lösen	43
	Freie ungedämpfte Schwingung	43
	Freie gedämpfte Schwingung	44
	Aperiodischer Grenzfall	45
	Kriechfall	46
Anhang F	Strecken, Stauchen, Schieben, Spiegeln	47
	Einleitung	47
	Zusammenfassung aus der Merkhilfe	47
	Strecken, Stauchen, Schieben, Spiegeln in $x$ - und $y$ -Richtung	48

## Allgemein

In der Physik versteht man unter Schwingung (engl. oscillations) eine wiederholte zeitliche Schwankung einer Zustandsgrösse. Beispiele sind ...

- eine Schaukel, bei der die Auslenkung wiederholt hin und her pendelt (Link)



- Federung beim Fahrzeug (Link)



In vielen Situationen sind Schwingungen zu beobachten. In diesem Kapitel möchten wir etwas genauer hinschauen, welche Kräfte am Werk sind und wie diese Schwingungen mathematisch beschrieben werden können.

Schwingungen können in verschiedene Kategorien eingeteilt werden. Wir werden die folgenden Unterscheidungen antreffen ...

- harmonische, periodische und nichtperiodische Schwingungen
- ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen
- lineare und nichtlineare Schwingungen

Im Folgenden geben wir eine kurze Übersicht über den Inhalt dieses Kapitels.

## Freie ungedämpfte Schwingung ( $\omega_0$ )

Wir starten mit den freien ungedämpften Schwingungen. Eine wichtige Unterkategorie sind die harmonischen Schwingungen. Zu ihrer Beschreibung werden die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus verwendet. Die Eigenschaften von Winkelfunktionen spielen dann auch bei Überlagerungen (Interferenzen) von harmonischen Schwingungen - und später auch bei sich ausbreitenden Wellen - eine herausragende Rolle. Es lohnt sich also, sich intensiver mit ihnen auseinanderzusetzen.

Wichtige Begriffe sind im Folgenden ...

- Freie Schwingung: das heisst, dass nach einer ersten Auslenkung/Anregung das System sich selbst überlassen wird. Es wirkt nur noch die Gravitationskraft.
- Ungedämpfte Schwingung: das heisst, dass keine Reibungs- oder Dämpfungskräfte wirken.
- Harmonische Schwingung: eine solche Schwingung lässt sich durch eine Sinus-, eine Cosinusfunktion oder eine Kombination der beiden beschreiben.

In Situationen, in denen nur eine ...

- Rückstellkraft wirkt, deren Stärke proportional zur Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist und deren Richtung zurück zur Gleichgewichtslage zeigt,

$$F_R = -k s \quad \text{z.B. für Masse-Feder-Schwinger}$$

- oder ein Rückstellmoment, dessen Stärke proportional zum Auslenkwinkel aus der Gleichgewichtslage und dessen Richtung zur Gleichgewichtslage zurück zeigt ...

$$M_R = -D \varepsilon \quad \text{z.B. für Drehpendel}$$

erhalten wir eine **harmonische Schwingung**.

Diese Schwingungen erfüllen die sogenannte **Schwingungsdifferentialgleichung**.

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Es ist üblich, die Auslenkungen mit der Variablen  $y$  zu bezeichnen. Wir haben für viele verschiedene Situationen (siehe Abschnitt "Eigenfrequenzen verschiedener harmonischer Schwingungen") die gleiche Schwingungsdifferentialgleichung. Wir müssen deshalb diese Gleichung nur einmal lösen und können sie auf viele verschiedene Situationen anwenden.

Das  $\omega_0$  ist die sogenannte Eigenkreisfrequenz und hängt vom physikalischen System ab. Im Falle eines Masse-Feder Schwingers gilt  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , wobei  $k$  die Federkonstante und  $m$  die Masse des an die Feder angebrachten Schwingers ist.

Durch zwei Bedingungen ist die Schwingung dann eindeutig festgelegt. Häufige Anfangsbedingungen sind ...

- Auslenkung  $y[0]$  zur Zeit  $t = 0$  und/oder
- Geschwindigkeit  $v[0] = \dot{y}[0]$  zur Zeit  $t = 0$

Im Allgemeinen lässt sich die Lösung der obigen Schwingungsdifferentialgleichung auf verschiedene, äquivalente Arten schreiben ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_S] \quad \text{oder} \quad \hat{y} \cos[\omega_0 t + \varphi_C] \quad \text{oder} \quad \hat{y}_1 \sin[\omega_0 t] + \hat{y}_2 \cos[\omega_0 t]$$

Einfache Lösungen haben die speziellen Anfangsbedingungen ...

$$\begin{array}{lll} y[0] = 0 & y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t] & \varphi_S = 0 \\ v[0] = 0 & y[t] = \hat{y} \cos[\omega_0 t] & \varphi_C = 0 \end{array}$$

Es gibt jeweils zwei Parameter, die auf Grund der (Anfangs)Bedingungen festgelegt werden. Im Anhang F wird näher darauf eingegangen, wie sich die Parameter der Lösungen auf den Amplitudenverlauf auswirken.

## Freie gedämpfte Schwingung ( $\omega_d$ )

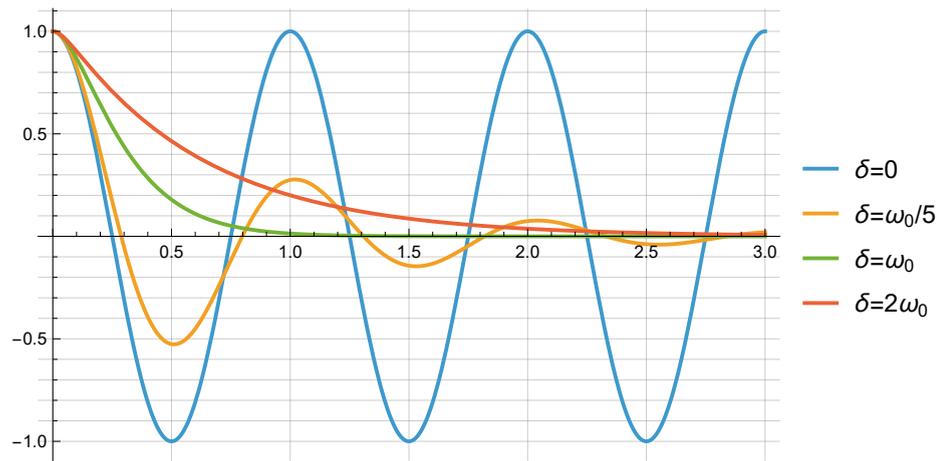
Die Amplitude bzw. die maximale Auslenkung der freien ungedämpften Schwingungen ändert sich nicht mit der Zeit. In der Realität haben wir jedoch immer Reibungsverluste. Dies lässt sich für Dämpfungen ...

$$F_D = -\beta v[t]$$

deren Stärke proportional zur Geschwindigkeit und deren Richtung in Gegenrichtung zur Geschwindigkeit wirkt, folgendermassen in die Schwingungsdifferentialgleichung integrieren ...

$$\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0 \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ und } \delta = \frac{\beta}{2m}$$

Die Lösungen für diese Differentialgleichung können nun für unterschiedlich starke Dämpfungen untersucht werden. Wir erhalten die folgenden Amplitudenverläufe ...



**Abbildung** Verlauf der Auslenkung für die vier Fälle mit der Anfangsbedingung  $v_0 = 0$

## Gedämpfte Schwingung

Falls der Abklingkoeffizient  $\delta$  grösser als 0 und kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega_0$  ist, erhalten wir eine **gedämpfte Schwingung** ...

$$0 < \delta < \omega_0 \quad y[t] = \dot{y}^* \cos[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \text{mit } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Die Schwingungsfrequenz  $\omega_d$  ist kleiner als die Eigenfrequenz  $\omega_0$ , und die Amplitude nimmt mit der Zeit exponentiell ( $e^{-\delta t}$ ) ab. Auf Grund der Anfangsbedingungen sind die zwei Parameter  $\varphi_0$  und  $\dot{y}^*$  auszurechnen.

## Kriechfall

Falls der Abklingkoeffizient grösser als die Eigenfrequenz ist, erhalten wir keine Schwingung. Der Amplitudenverlauf nähert sich immer mehr der  $t$ -Achse (**Kriechfall**), erreicht sie jedoch nie (bzw. erst nach  $\infty$  langer Zeit). Der Verlauf wird folgendermassen beschrieben ...

$$\delta > \omega_0 \quad y[t] = \dot{y}^* \sinh[\omega_d' t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \text{mit } \omega_d' = \sqrt{|\omega_0^2 - \delta^2|}$$

Hier treffen wir nun eine bislang wenig vertraute Funktion an: den Sinus hyperbolicus. Wir werden diese Funktion weiter hinten genauer anschauen. Auch hier sind auf Grund der Anfangsbedingungen die zwei Parameter  $\varphi_0$  und  $\dot{y}^*$  zu berechnen.

## Aperiodischer Grenzfall

Falls der Abklingkoeffizient gleich der Eigenfrequenz ist, haben wir den Grenzfall zwischen einer Schwingung und dem Kriechfall. Diesen Grenzfall nennt man **aperiodischer Grenzfall**. Beim ihm geht die Amplitude des Schwingers auf schnellstem Weg gegen 0 (schneller als jeder Kriechfall), jedoch ohne die  $x$ -Achse zu überschreiten. Die Lösung lautet ...

$$\delta = \omega_0 \quad y[t] = (\dot{y}_1^* + \dot{y}_2^* t) e^{-\delta t}$$

Wiederum legen die Anfangsbedingungen die beiden Parameter  $\dot{y}_1^*$  und  $\dot{y}_2^*$  fest.

## Erzwungene gedämpfte Schwingung

Nach der Besprechung von freien ungedämpften und gedämpften Schwingungen untersuchen wir auch noch erzwungene Schwingungen. Bei diesen wirkt während des Schwingungsvorgangs neben der Rückstellkraft und der Dämpfungskraft auch noch eine externe Kraft. Wir behandeln nur den Fall, bei

dem diese externe Kraft eine harmonische Funktion darstellt ...

$$F_E = \hat{F}_E \cos[\omega t]$$

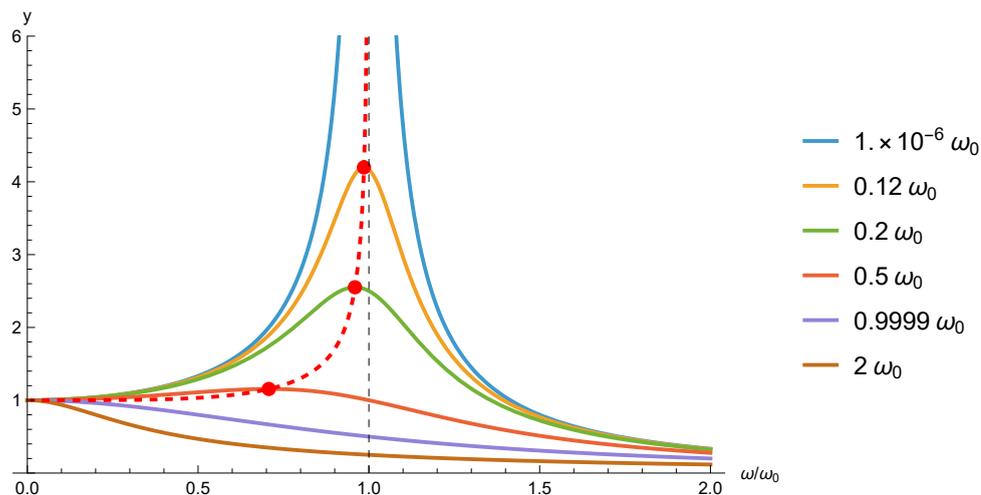
Wir erhalten damit die folgende allgemeine Schwingungsdifferentialgleichung ...

$$\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = \frac{\hat{F}_E}{m} \cos[\omega t]$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat je nach Anfangsbedingungen einen anderen Verlauf. Nach der sogenannten **Einschwingzeit** ist der Verlauf jedoch für alle Anfangsbedingungen gleich ...

$$y[t] = \hat{y} \cos[\omega t - \alpha]$$

Amplitude  $\hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$   
 Phasenverschiebung  $\alpha = \text{ArcTan}\left[\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$



**Abbildung** Resonanzkurven für verschiedene Abklingkoeffizienten  $\delta$  (Dämpfungen)

Der Schwinger hat die **gleiche Kreisfrequenz** wie die erregende Kraft. Wir haben jedoch eine **Phasenverschiebung**: die Phasen des Schwingers und die Phase der äusseren Kraft sind nicht gleich (die beiden Schwingungen sind nicht synchron, haben also ihre Maxima oder Minima zeitlich versetzt). Wir haben ausserdem eine Amplitude, die von der anregenden Frequenz  $\omega$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  des Schwingers abhängt. Wenn die beiden Frequenzen sehr nahe beieinander liegen, haben wir eine grosse Amplitude (**Resonanz**).

## Eigenfrequenzen verschiedener harmonischer Schwingungen

Im letzten Abschnitt untersuchen wir noch verschiedene Systeme, die auf (z.T. angenäherte) harmonische Schwingungen führen. Nämlich ...

- Horizontaler und vertikaler Masse-Feder-Schwinger
- Drehpendel (Torsionspendel)
- Mathematisches Pendel (Fadenpendel)
- Physikalisches Pendel
- Flüssigkeitsschwingung (Wasserpendel)

Wir bestimmen für diese Systeme die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ . All diese Systeme erfüllen die gleiche Schwingungsdifferentialgleichung ...

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

die wir bereits mathematisch untersucht haben. Die gleichen Lösungen bzw. Formeln können somit auf all diese verschiedenen Systeme angewendet werden.

## Mathematik

Das Kapitel “Schwingungen” enthält einiges an Mathematik. Für Interessierte wurden Hintergrundinformationen und Herleitungen zu einem grossen Teil in die Anhänge ausgelagert.

- Anhang C      Kriechfall (Sinh und Cosh)
- Anhang D       $\sin[\varepsilon]$  für kleine Winkel
- Anhang E      Schwingungsdifferentialgleichung lösen
- Anhang F      Strecken, Schieben, Spiegeln in  $x$ - und  $y$ -Richtung

Man muss nicht jede Herleitung verstehen. Wichtig ist jedoch ein Verständnis ...

- der obigen Abbildung mit den verschiedenen Verläufen (ungedämpfte Schwingung, gedämpfte Schwingung, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall),
- der obigen Abbildung mit den verschiedenen Resonanzkurven,
- der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  für die verschiedenen Systeme.

## Experimente

Im Anhang B sind noch weitere Experimente zu Schwingungen aufgeführt ...

- Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels
- Das Galilei'sche Pendel
- Resonanz beim Fadenpendel
- Wie schaukelt man richtig
- Chaotisches Pendel
- Die anhängliche Schnur
- Die schwingenden Wäscheklammern
- Hin und her und rauf und runter
- Resonanz an der Unterputzröhre
- Lissajous-Figuren aus Sand

Diese Experimente wurden weitgehend dem Buch ...

“Physikalische Freihandexperimente - Band 1 Mechanik”, Koordinator Helmut Hilscher  
Aulis Verlag, 5. Auflage 2018

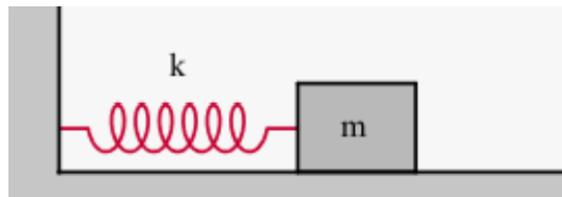
entnommen.

# Freie ungedämpfte Schwingung ( $\omega_0$ )

## Harmonische Schwingungen

### Aufstellen der Differentialgleichung

**Harmonische Schwingungen** sind dadurch charakterisiert, dass sie sich allein mit Sinus- und/oder Cosinus-Funktionen darstellen lassen. Dies ist immer der Fall, wenn die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung ist. Dies werden wir im Folgenden mit Hilfe des horizontalen Masse-Feder-Schwingers zeigen.



**Abbildung** Masse-Feder-Schwinger ([Link](#))

Bei einer Feder haben wir die folgende **Rückstellkraft**  $F_R$  ...

$$(1) \quad F_R = -k x$$

$x$                       Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ( $x = 0$  bei ungespannter Feder)

$k$                               Federkonstante

Bei einer Schwingung sind die Auslenkung und damit auch die Rückstellkraft zeitlich veränderlich. Wir schreiben deshalb die Rückstellkraft für einen horizontalen Masse-Feder-Schwinger explizit mit der Zeitabhängigkeit ...

$$(1)' \quad F_R[t] = -k x[t]$$

Ausserdem verwenden wir das 2. Newton'sche Axiom ...

$$(2) \quad F_R = m a$$

Da die Beschleunigung die zweite Ableitung der Position nach der Zeit ist ( $a = \ddot{x}$ ), folgt ...

$$(2)' \quad F_R[t] = m \ddot{x}[t]$$

Das 2. Newton'sche Gesetz ( $F = m a$ ) ergibt dann durch Gleichsetzen von (1)' und (2)' die folgende Gleichung ....

$$(3) \quad m \ddot{x}[t] = -k x[t] \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}[t] + \frac{k}{m} x[t] = 0$$

Mit der Definition  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  (die wir wählen, damit diese Gleichung und die Gleichung für die Auslenkung schöner bzw. einfacher aussehen) folgt schlussendlich die **Differentialgleichung** (DGL) für eine freie ungedämpfte Schwingung ...

$$(4) \quad \ddot{x}[t] + \omega_0^2 x[t] = 0 \quad \text{DGL für eine freie ungedämpfte Schwingung}$$

## Lösung der Differentialgleichung

Im Folgenden brauchen wir die bei Schwingungen übliche Schreibweise  $y$ , unabhängig davon, ob es sich um eine Auslenkung, um einen Winkel oder um eine Höhe handelt.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Funktion  $y[t]$  zu finden, für die die zweite Ableitung der Funktion gleich dem negativen der ursprünglichen Funktion ist, multipliziert mit der Konstanten  $\omega_0^2$  ...

$$(5) \quad \ddot{y}[t] = -\omega_0^2 y[t]$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung hat die Form ...

$$(6) \quad y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Für Interessierte wird im Anhang F gezeigt, wie mit Hilfe der Differentialrechnung gezeigt werden kann, dass die Funktion (6) eine Lösung der obigen Differentialgleichung (5) ist. Es gilt ...

- Zwei Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = 0$  (oder auch zu anderen Zeiten) legen ...
  - die **Amplitude**  $\hat{y}$  (d.h. die maximale Auslenkung nach rechts und links) und
  - den **Nullphasenwinkel**  $\varphi_0$  (d.h. das Argument des Sinus zur Zeit  $t = 0$ ) fest.
- Die maximale Auslenkung  $\hat{y}$  der Schwingung ändert sich nicht mit der Zeit: es handelt sich um eine **freie und ungedämpfte Schwingung**.
- Die **Eigenkreisfrequenz**  $\omega_0$  hängt von der physikalischen Situation ab.
- Aus  $\omega_0$  können auch die **Eigenfrequenz** und die **Periodendauer** bestimmt werden:  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

## Alternative Darstellungen der Lösung

Auf Grund der Eigenschaften von Winkelfunktionen können wir an Stelle der Sinusfunktion (mit Amplitude und Nullphasenwinkel) auch die Cosinusfunktion (mit Amplitude und anderem Nullphasenwinkel) oder eine Kombination der Sinus- und Cosinusfunktion (mit 2 Amplituden, aber ohne Nullphasenwinkel) verwenden.

Wenn wir die Cosinus Funktion um  $90^\circ$  nach rechts schieben erhalten wir die Sinusfunktion: d.h. (vergleiche Physik Merkhilfe) ...

$$\sin[\alpha] = \cos[\alpha - 90^\circ]$$

$$\text{bzw.} \quad \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \cos\left[\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]$$

Einsetzen in (6) ergibt ...

$$(6)' \quad y[t] = \hat{y} \cos[\omega_0 t + \gamma_0]$$

$$\text{mit der gleichen Amplitude, aber einem anderen Nullphasenwinkel } \gamma_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$$

Alternativ können wir auch die Beziehung der Physik Merkhilfe ...

$$\sin[\alpha + \beta] = \sin[\alpha] \cos[\beta] + \cos[\alpha] \sin[\beta]$$

$$\text{bzw.} \quad \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \sin[\omega_0 t] \cos[\varphi_0] + \cos[\omega_0 t] \sin[\varphi_0]$$

in (6) einsetzen und erhalten ...

$$y[t] = \hat{y} * (\sin[\omega_0 t] \cos[\varphi_0] + \cos[\omega_0 t] \sin[\varphi_0])$$

und mit den Definitionen  $y_1^* = \hat{y} \cos[\varphi_0]$  und  $y_2^* = \hat{y} \sin[\varphi_0]$  die Lösung ...

$$(6)'' \quad y[t] = y_1^* \sin[\omega_0 t] + y_2^* \cos[\omega_0 t]$$

einen Ausdruck ohne Nullphasenwinkel, dafür mit zwei Amplituden.

Zusammenfassend gilt für die verschiedenen Darstellungen der Grössen einer freien ungedämpften Schwingung ...

$y[t]$	Auslenkung zur Zeit $t$		
$\hat{y}$	Amplitude, Schwingungsweite, maximale Auslenkung		
$\omega_0$	Kreisfrequenz mit $\omega_0 = 2 \pi f_0 = 2 \pi \frac{1}{T_0}$		
$f_0$	Frequenz, Anzahl Schwingungen pro Zeit		
$T_0$	Schwingungsdauer, Periodendauer, Zeitdauer für eine Schwingung		
	$f_0 = \frac{1}{T_0}$		
$\varphi[t]$	Phase zur Zeit $t$ ; $\varphi[t] = \omega_0 t + \varphi_0$		
$\varphi_0$	Nullphasenwinkel für die Sinusfunktion, Phase zur Zeit $t = 0$ , $\varphi_0 = \varphi[0]$		
$Y_0$	$Y_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ , Nullphasenwinkel für die Cosinusfunktion		
$y_1^*, y_2^*$	von den Anfangsbedingungen abhängige konstante Koeffizienten		
	$y_1^* = \hat{y} \cos[\varphi_0]$	$\hat{y} = \sqrt{y_1^{*2} + y_2^{*2}}$	
	$y_2^* = \hat{y} \sin[\varphi_0]$	$\tan[\varphi_0] = \frac{y_2^*}{y_1^*}$	Quadrant beachten!

Je nach Anfangsbedingung hat die eine oder andere Form Vorteile: z.B. wenn am Anfang die Auslenkung maximal ist, dann empfiehlt sich die Form (6)' mit der Cosinus Funktion.

### Geschwindigkeit und Beschleunigung

Durch einfaches Differenzieren können aus der momentanen Auslenkung  $y[t]$  sehr schnell die momentane Geschwindigkeit  $v[t]$  und die momentane Beschleunigung  $a[t]$  gefunden werden.

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$v[t] = \frac{d}{dt} y[t] = \frac{d}{dt} (\hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]) \stackrel{(A,B,C,D)}{=} \hat{y} \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = \hat{v} \cos[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$a[t] = \frac{d^2}{dt^2} y[t] = \frac{d}{dt} v[t] = \frac{d}{dt} (\hat{y} \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0]) \stackrel{(A,B,C,D)}{=} -\hat{y} \omega_0^2 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$= -\hat{a} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Daraus folgt für die maximalen Werte für  $v$  bzw.  $a$  ...

$$\hat{v} = \omega_0 \hat{y}$$

$$\hat{a} = \omega_0 \hat{v} = \omega_0^2 \hat{y}$$

### Alternative Berechnung mit Hilfe der Kreisbewegung

Die Gleichungen für die maximalen Geschwindigkeit und die maximale Beschleunigung können wir auch alternativ erhalten. Wenn sich ein Körper mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  auf einer Kreisbahn mit einem Kreisradius von  $r$  bewegt, dann haben wir die folgenden Analogien ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0] \quad \text{die } y\text{-Koordinate bei der Kreisbewegung}$$

$$\hat{y} = r$$

$$\hat{v} = v_{\text{Bahn}} = \omega_0 r$$

$$\hat{a} = a_{\text{Zentripetal}} = \frac{v_{\text{Bahn}}^2}{r} = \frac{\omega_0^2 r^2}{r} = \omega_0^2 r$$

## Energieumwandlung

Bei den Schwingungen findet konstant eine Energieumwandlung statt. Beim horizontalen Masse-Feder-Schwinger ist dies ein Wechsel zwischen der zeitabhängigen potentiellen Energie der Federspannung ...

$$E_{\text{Federspannung}} = \frac{1}{2} k y[t]^2 = \frac{1}{2} k (\hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0])^2$$

und der zeitabhängigen Bewegungsenergie des Körpers ...

$$E_{\text{Bewegungsenergie}} = \frac{1}{2} m v[t]^2 = \frac{1}{2} m (\hat{y} \omega_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0])^2$$

Die Totalenergie ergibt sich zu ...

$$E_{\text{total}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \sin^2[\omega_0 t + \varphi_0] + \frac{1}{2} m \hat{y}^2 \omega_0^2 \cos^2[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Mit Hilfe der früheren Definition von  $\omega_0$  (d.h.  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ) ergibt sich ...

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 \sin^2[\omega_0 t + \varphi_0] + \frac{1}{2} m \hat{y}^2 \frac{k}{m} \cos^2[\omega_0 t + \varphi_0]$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 * (\sin^2[\omega_0 t + \varphi_0] + \cos^2[\omega_0 t + \varphi_0])$$

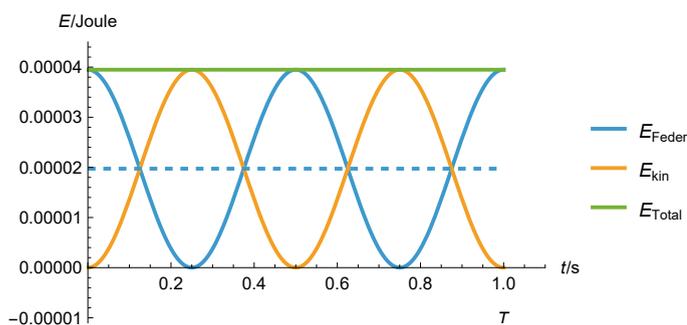
Und mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras ( $\sin^2[\alpha] + \cos^2[\alpha] = 1$  für alle Winkel  $\alpha$ ) erhalten wir schliesslich ...

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2$$

Mit Hilfe von  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  erhalten wir aber auch ...

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} k \hat{y}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{y}^2 = \frac{1}{2} m \hat{v}^2$$

Der zeitliche Verlauf der Energien kann für eine Periode folgendermassen illustriert werden.



**Abbildung** Wechsel zwischen potentieller und Bewegungsenergie beim horizontalen Masse-Feder-Schwinger für eine Periode mit den Werten:

$$T = 1 \text{ s}, m = 0.02 \text{ kg}, \varphi_0 = \pi/2, \hat{y} = 0.01 \text{ m}$$

$$\rightarrow k = \omega_0^2 m = 0.789568 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Sie denken vielleicht, dass in obiger Darstellung zwei Perioden dargestellt werden. Dem ist nicht so. Wir sehen dies, wenn wir die Energien an den einzelnen Positionen genauer untersuchen.

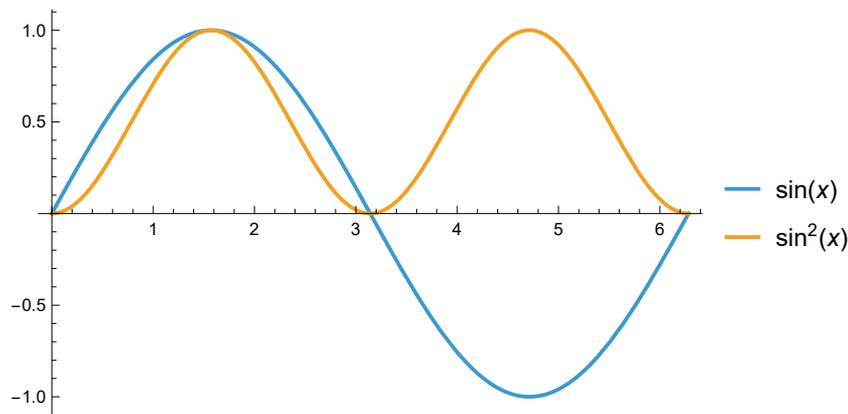
Position	$E_{kin}$	$E_{pot}$
maximale Auslenkung nach links	0	maximal
Nulldurchgang von links nach rechts	maximal	0
maximale Auslenkung nach rechts	0	maximal
Nulldurchgang von rechts nach links	maximal	0
maximale Auslenkung nach links	0	maximal
1 Periode	2 Perioden	2 Perioden

Während die Position  $y[t]$  eine Periode hat, haben die beiden Energien  $E_{kin}$  und  $E_{pot}$  2 Perioden.

Wir können dies auch mathematisch begründen, denn ...

- die Auslenkung ist proportional zu einer Sinusfunktion  $\sin[x]$
- die Energie ist proportional zu  $\sin[x]^2$

Wenn wir diese zwei Funktionen plotten, ...



sehen wir, dass die Sinusfunktion 1 Periode hat, wenn die quadrierte Sinusfunktion 2 Perioden hat.

## Anharmonische Schwingungen

Die nicht-harmonischen Schwingungen lassen sich nicht allein durch die Sinus- und Cosinusfunktionen beschreiben. In diese Kategorie fallen somit ...

- das mathematische und das physikalische Pendel (s. später), bei der die Rückstellkraft nicht (genau) proportional zur Auslenkung ist,
- die gedämpften Schwingungen (wo zusätzlich die Exponentialfunktion auftritt).

Wir werden diese Schwingungen weiter hinten im Skript noch untersuchen.

# Freie gedämpfte Schwingung ( $\omega_d$ )

## Einleitung

In der Regel nimmt auf Grund von Reibung und anderen Verlusten die maximale Auslenkung mit der Zeit ab. Mit dem Ansatz eines **Dämpfungsterms**  $F_D$  ...

$$F_D = -\beta v[t]$$

der proportional zum Betrag der Geschwindigkeit und ihr entgegengerichtet ist, folgt ...

$$F[t] = F_R + F_D = -k y[t] - \beta v[t] = -k y[t] - \beta \dot{y}[t] = m a = m \ddot{y}[t]$$

bzw. mit der Definition  $\delta = \frac{\beta}{2m}$  und wiederum  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  folgt die Differentialgleichung für eine **freie gedämpfte Schwingung**...

$$\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

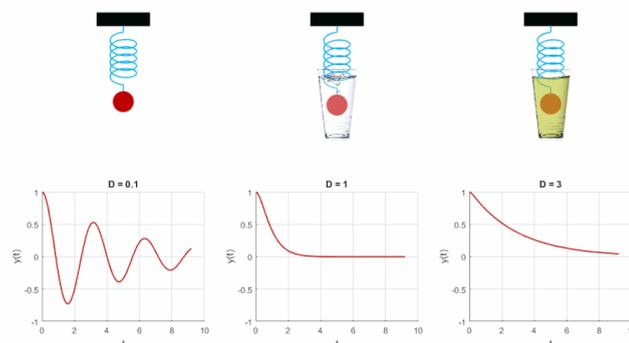
$\beta$  **Dämpfungskonstante**, für die gilt  $F_D = -\beta v[t]$   
 $\delta$  **Abklingkoeffizient**, definiert als  $\delta = \frac{\beta}{2m}$

Je nach Grösse der Dämpfungskonstanten  $\beta$  bzw. des Abklingkoeffizienten  $\delta$  unterscheidet man die folgenden vier "Schwingungstypen" ...

$\delta = 0$	ungedämpfte Schwingung
$0 < \delta < \omega_0$	gedämpfte Schwingung
$\delta = \omega_0$	aperiodischer Grenzfall (keine Schwingung)
$\delta > \omega_0$	Kriechfall (keine Schwingung)

Wir können uns noch fragen, ob ein Dämpfungsterm, der proportional zur Geschwindigkeit ist, Sinn macht. Im Kapitel "Strömungen" haben wir gesehen, dass bei laminaren Strömungen in einem Rohr und bei laminaren Strömungen um eine Kugel die Reibungskräfte proportional zur Geschwindigkeit sind. Bei grösseren Geschwindigkeiten bzw. turbulenten Strömungen ist der Strömungswiderstand proportional zur Geschwindigkeit im Quadrat. Für kleine Geschwindigkeiten ist demnach dieser Ansatz durchaus gerechtfertigt.

Die drei gedämpften Schwingungstypen sind für einen vertikalen Federschwinger in folgender Abbildung festgehalten.



**Abbildung** Animation unter ([Link](#))

## Allgemeine und spezielle Lösungen

Im Folgenden werden für die vier "Schwingungstypen" sowohl die allgemeinen Lösungen, deren Parameter ( $\hat{y}$ ,  $\varphi_0$ , ...) von den Anfangsbedingungen abhängen, als auch die Lösungen für die speziellen Anfangsbedingungen  $y[0] = 0$  bzw.  $v[0] = 0$  angegeben. Dabei gilt jeweils ...

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad \omega'_d = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} \qquad \hat{y} * e^{-\delta t}: \text{Hüllkurve}$$

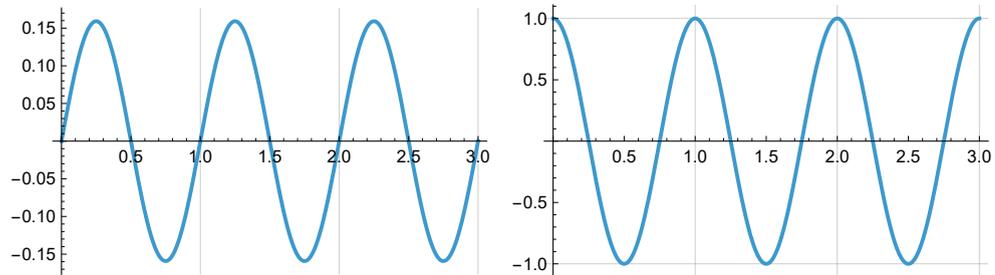
Im Anhang F wird gezeigt, dass die allgemeinen Lösungen die Schwingungsdifferentialgleichung erfüllen und die speziellen Lösungen die angegebenen Anfangsbedingungen erfüllen.

## Ungedämpfte Schwingung $\delta = 0$

Allgemeine Lösung:  $y[t] = \hat{y} \text{Sin}[\omega_0 t + \varphi_0]$   
 oder  $\hat{y} \text{Cos}[\omega_0 t + \gamma_0]$  oder  $y_1^* \text{Sin}[\omega_0 t] + y_2^* \text{Cos}[\omega_0 t]$

speziell  $y[0] = 0, v[0] = v_0$ :  $y[t] = \frac{v_0}{\omega_0} \text{Sin}[\omega_0 t]$

speziell  $y[0] = y_0, v[0] = 0$ :  $y[t] = y_0 \text{Cos}[\omega_0 t]$



**Abbildung** Ungedämpfte Schwingungen: links  $y[0] = 0$  und rechts  $v[0] = 0$

Diesen Fall (ohne Dämpfung) haben wir schon im Abschnitt über ungedämpfte Schwingungen besprochen und kennen deshalb diese drei Arten zur Darstellung der allgemeinen Lösung.

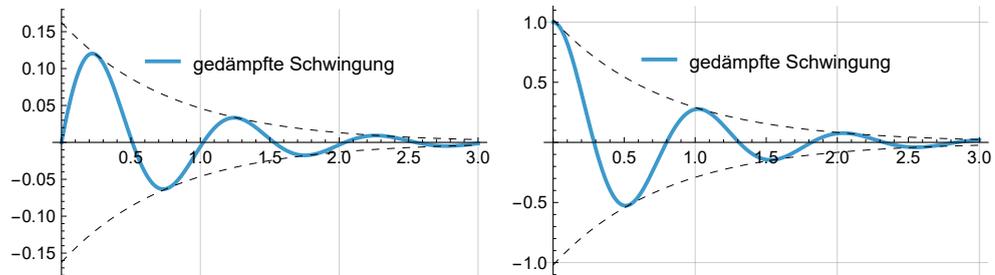
## Gedämpfte Schwingung $0 < \delta < \omega_0$

Allgemeine Lösung:  $y[t] = \hat{y} \text{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t}$  oder  $(y_1^* \text{Sin}[\omega_d t] + y_2^* \text{Cos}[\omega_d t]) e^{-\delta t}$

mit:  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

speziell  $y[0] = 0, v[0] = v_0$ :  $y[t] = \frac{v_0}{\omega_d} \text{Sin}[\omega_d t] e^{-\delta t}$

speziell  $y[0] = y_0, v[0] = 0$ :  $y[t] = y_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} \text{Cos}\left[\omega_d t - \text{ArcSin}\left[\frac{\delta}{\omega_0}\right]\right] e^{-\delta t}$



**Abbildung** Gedämpfte Schwingungen: links  $y[0] = 0$  und rechts  $v[0] = 0$

Wir stellen fest, dass die Kreisfrequenz  $\omega_d$  im Vergleich zur ungedämpften Schwingung kleiner ist und dass neu der **Dämpfungsterm**  $e^{-\delta t}$  dazugekommen ist. Die maximale Auslenkung nimmt exponentiell ab. Spezielle Lösungen ...

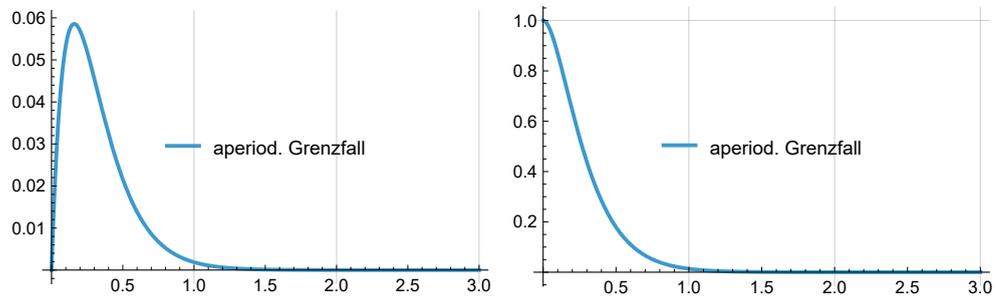
## Aperiodischer Grenzfall

$$\delta = \omega_0$$

Allgemeine Lösung: 
$$y[t] = y_1^* e^{-\delta t} + y_2^* t e^{-\delta t} = (y_1^* + y_2^* t) e^{-\delta t}$$

speziell  $y[0] = 0$ : 
$$y[t] = v_0 t e^{-\delta t}$$

speziell  $v[0] = 0$ : 
$$y[t] = y_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t}$$

**Abbildung** Aperiodischer Grenzfall: links  $y[0] = 0$  und rechts  $v[0] = 0$ 

Sowohl bei einer ungedämpften als auch bei einer nicht übermässig gedämpften Schwingung überqueren die Schwinger die Gleichgewichtslage. Wenn die Dämpfung jedoch sehr gross ist, dann überquert der Schwinger die Gleichgewichtslage nicht mehr. Er nähert sich zwar immer mehr der Gleichgewichtslage, würde sie jedoch erst nach unendlich langer Zeit erreichen (Kriechfall). Der hier besprochene "aperiodische Grenzfall" ist diejenige Situation, die die Schwingungen von diesen Kriechfällen trennt. Vergleiche ([Link](#)).

## Kriechfall

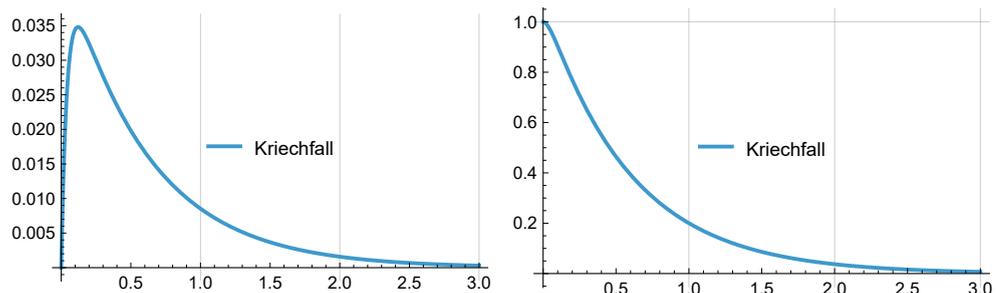
$$\delta > \omega_0$$

Allgemeine Lösung: 
$$y[t] = \dot{y} \operatorname{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} = (\dot{y}_1^* \operatorname{Sinh}[\omega'_d t] + \dot{y}_2^* \operatorname{Cosh}[\omega'_d t]) e^{-\delta t}$$

mit: 
$$\omega'_d = \sqrt{|\omega_0^2 - \delta^2|} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

speziell  $y[0] = 0$ : 
$$y[t] = \frac{v_0}{\omega'_d} \operatorname{Sinh}[\omega'_d t] e^{-\delta t}$$

speziell  $v[0] = 0$ : 
$$y[t] = y_0 \left( \frac{\delta}{\omega'_d} \operatorname{Sinh}[\omega'_d t] + \operatorname{Cosh}[\omega'_d t] \right) e^{-\delta t}$$

**Abbildung** Kriechfall: links  $y[0] = 0$  und rechts  $v[0] = 0$ 

Für diesen Fall erhalten wir für die allgemeine Lösung einen ähnlichen Ausdruck wie für die gedämpfte Schwingung ...

$$0 < \delta < \omega_0 \quad \dot{y} \operatorname{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\delta > \omega_0 \quad \dot{y} \operatorname{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \omega'_d = \sqrt{|\omega_0^2 - \delta^2|} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

An Stelle des Sinus haben wir jedoch den sogenannten Sinus hyperbolicus. Ausserdem haben wir eine andere Definition der Kreisfrequenz.

Wie kommt man auf diesen Ausdruck? Die ausführliche Begründung und auch die Erklärung zu den weniger vertrauten Funktionen Sinus hyperbolicus (Sinh) und Cosinus hyperbolicus (Cosh) finden Sie im Anhang G.

Beispiel: Eine durch Federkraft schliessende Pendeltür ist bei guter Einstellung ein im Prinzip schwingfähiges System, wird aber stets so gedämpft, dass sie sich ohne Überschwingen, also kriechend schliesst. [Link](#).

Eine möglichst schnelle Einstellung in eine neue Ruhelage nach einer sprunghaften Änderung ist vielfach erwünscht. Diese erreicht man in der Nähe des aperiodischen Grenzfalles.

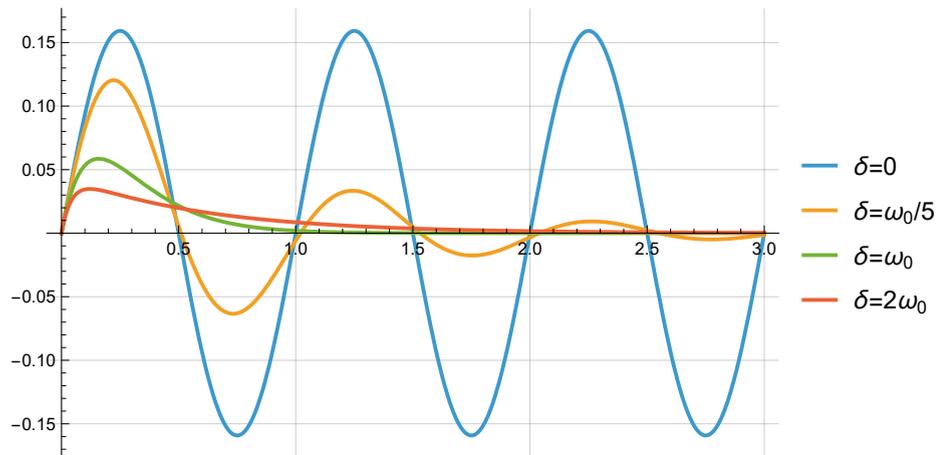
Beispielsweise bei elektromechanischen Messgeräten wird allerdings gemäß DIN EN 60051-1 eine geringere Dämpfung empfohlen, weil mit einem Überschwinger das Ende des Bewegungsvorgangs leichter als beim Kriechen erkennbar ist, und weil im Kriechfall bedingt durch Haftreibung leichter eine Messabweichung entsteht. [Link](#)

### Gegenüberstellung der vier Schwingungstypen

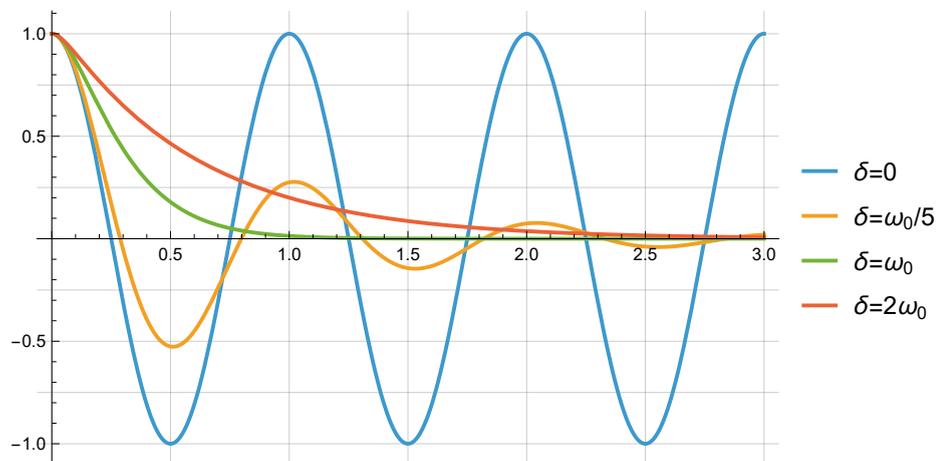
In den folgenden zwei Abbildungen sind die Verläufe der Auslenkungen für die 4 Schwingungstypen ...

$\delta = 0$	ungedämpfte Schwingung
$0 < \delta < \omega_0$	gedämpfte Schwingung
$\delta = \omega_0$	aperiodischer Grenzfall (keine Schwingung)
$\delta > \omega_0$	Kriechfall (keine Schwingung)

bei den zwei speziellen Anfangsbedingungen eingezeichnet.



**Abbildung** Verlauf der Auslenkung für die vier Schwingungstypen mit der Anfangsbedingung  $y_0 = 0$



**Abbildung** Verlauf der Auslenkung für die vier Schwingungstypen mit der Anfangsbedingung  $v_0 = 0$

# Erzwungene gedämpfte Schwingung

## Differentialgleichung

Bisher haben wir **freie Schwingungen** besprochen, bei denen das System nach einer einmaligen Auslenkung ungestört weiterschwingen kann.

Im Folgenden besprechen wir eine **erzwungene Schwingung**, bei der eine äussere Kraft wirkt. Wir untersuchen hier den Fall bei einer harmonischen Kraft  $F_E$ , die das System zum Schwingen bringt ...

$$F_E = \hat{F}_E \cos[\omega t] \quad \text{Erregerkraft, Störkraft}$$

sowie die bekannten ...

$$F_R[t] = -k y[t] \quad \text{Rückstellkraft}$$

$$F_D[t] = -\beta \dot{y}[t] \quad \text{Dämpfungskraft}$$

Daraus folgt (mit den üblichen Definitionen für  $\delta$  und  $\omega_0$ ) die folgende Differentialgleichung ...

$$F[t] = F_E[t] + F_R[t] + F_D[t] = m \ddot{y}[t] \quad \text{bzw.}$$

$$\ddot{y}[t] + 2 \delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = \frac{\hat{F}_E}{m} \cos[\omega t]$$

## Lösungen

Der genaue Verlauf dieser Schwingung hängt von den Anfangsbedingungen ab. Aber nach einer gewissen Zeit - der sogenannten **Einschwingzeit** - stellt sich (unabhängig von den Anfangsbedingungen) ein stationärer Zustand, der sogenannte "**eingeschwungene Zustand**", ein. Er lässt sich folgendermassen beschreiben ...

$$y[t] = \hat{y} \cos[\omega t - \alpha] \quad \text{Schwingungsverlauf im eingeschwungenen Zustand}$$

$$\text{mit } \hat{y} \quad \text{Amplitude}$$

$$\text{mit } \alpha \quad \text{Phasenverzögerung des Schwingers gegenüber dem Erreger}$$

Die **maximale Auslenkung**  $\hat{y}$  sowie die **Phasenverzögerung**  $\alpha$  sind gegeben durch (wenn die Dämpfung mit Hilfe von  $\delta$  oder mit Hilfe von  $\beta$  spezifiziert wird) ...

$$\text{mit } \delta \quad \hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}} \quad \alpha = \text{ArcTan} \left[ \frac{2 \omega \delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

$$\text{mit } \beta \quad \hat{y} = \frac{\hat{F}_E}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \quad \alpha = \text{ArcTan} \left[ \frac{\omega \beta}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \right]$$

## Frequenz

Die erzwungene Schwingung ist im eingeschwungenen Zustand eine harmonische Schwingung und hat die gleiche Frequenz  $\omega$  wie der Erreger.

## Amplitude (Resonanz)

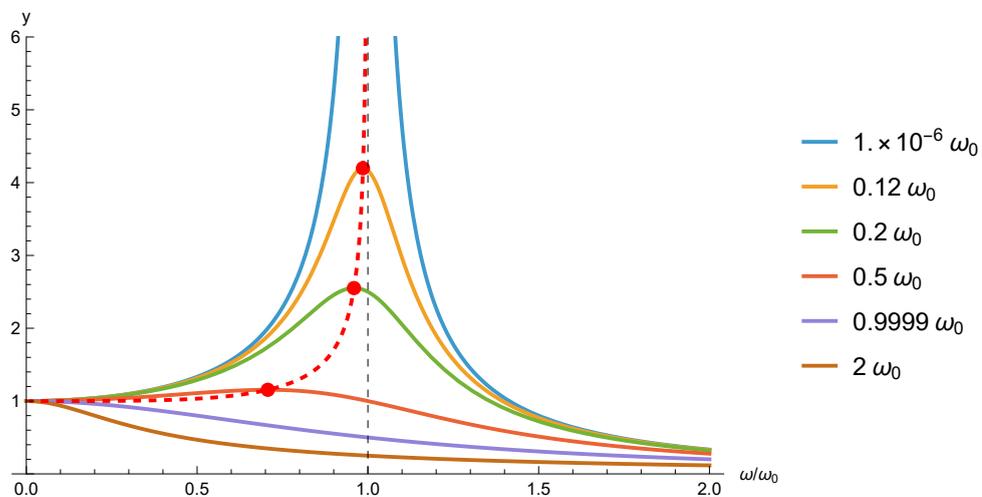
Wir stellen fest: Im eingeschwungenen Zustand gilt für die Amplitude ...

- Die maximale Auslenkung  $\hat{y}$  ist unabhängig von der Zeit.
- Für  $\omega = 0$  (es wirkt immer die gleiche Kraft) erhalten wir die von der Dämpfung unabhängige **statische Auslenkung**. Sie beträgt ...

$$\hat{y}_{\text{statisch}} = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0^2)^2 + 4 \delta^2 0^2}} = \frac{\hat{F}_E}{m \omega_0^2}$$

- Für  $\omega \gg \omega_0$  geht die Auslenkung allmählich gegen 0.
- Für Erregerfrequenzen im Bereich der Eigenfrequenz des Schwingers ändert sich die Amplitude stark mit der Frequenz des Erregers und kann sehr gross werden. Sie ist proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}$ . Der

Funktionsgraph sieht folgendermassen aus ...



**Abbildung** Resonanzkurven für sechs verschiedene Abklingkoeffizienten  $\delta$   
 Je grösser die Dämpfung, desto kleiner ist die Resonanzkreisfrequenz, bei der die Amplitude maximal wird.

- Wenn die Erregerfrequenz  $\omega$  und die Eigenfrequenz  $\omega_0$  nahe beieinander liegen, werden bei kleiner Dämpfung sehr grosse Amplituden erreicht. Man spricht von **Resonanz** bzw. **Resonanzkatastrophe** ([Link](#)), wenn das System bzw. Bauteil durch übermässige Schwingungsamplituden zerstört wird.
- Für jedes  $\delta$  ergibt sich eine Kreisfrequenz  $\omega_R$  (sogenannte **Resonanzkreisfrequenz**), bei der die Amplitude maximal wird. Wir können die Stelle für dieses Maximum ausrechnen, indem wir den Amplitudenverlauf  $\hat{y}[\omega]$  ...

$$\hat{y}[\omega] = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}$$

nach  $\omega$  ableiten und Null setzen. Wir erhalten die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_R$  ...

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \delta^2} \quad \text{bzw.} \quad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}}$$

- Die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_R$  ist kleiner als die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ .

- Die Amplitude an dieser Resonanzstelle ergibt sich, wenn wir diese Kreisfrequenz in  $\hat{y}[\omega]$  einsetzen zu ...

$$\hat{y}[\omega_R] = \frac{\hat{F}_E}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2})^2)^2 + 4\delta^2(\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\delta^4 + 4\delta^2(\omega_0^2 - 2\delta^2)}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

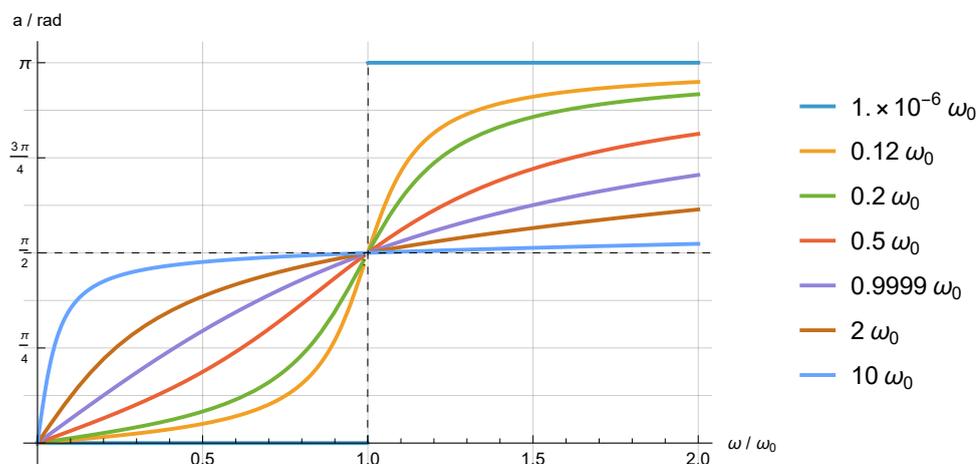
Wir sehen, dass mit zunehmender Dämpfung ( $\delta$ ) das Maximum bei kleineren Frequenzen auftritt und das Maximum kleinere Werte annimmt. Die strichlierte Linie ergibt den Verlauf dieser Maxima bei veränderlicher Dämpfung.

- Für  $\delta \leq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  verschwindet die Resonanz völlig. Die Amplitude ist immer kleiner als die statische Auslenkung.

## Phasenverschiebung

Interessant ist auch die auftretende Phasenverschiebung. Sie hat die Formel ...

$$\alpha = \text{ArcTan}\left[\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]$$



**Abbildung** Phasenverschiebung versus Erregerfrequenz bei zunehmendem Abklingkoeffizienten

Wir wissen gemäss Anhang F ...

- $\hat{y} \cos[\omega t - \alpha]$  ist die um  $\alpha$  nach rechts "geschobene" Funktion.
- Das heisst, dass ...
  - bei  $\omega \approx 0$  (d.h.  $\alpha \approx 0$ ) der Schwinger und der Erreger im Gleichtakt laufen.
  - bei  $\omega = \omega_0$  für alle Abklingkoeffizienten der Schwinger dem Erreger um  $\frac{\pi}{2}$  (bzw. 90°) hinterherläuft.
  - dass mit zunehmender Erregerfrequenz der Schwinger dem Erreger immer mehr hinterherläuft.
- Für  $\delta = 0$  gilt, dass ...
  - bei  $0 \leq \omega < \omega_0$  der Schwinger und der Erreger im Gleichtakt laufen.
  - bei  $\omega_0 < \omega$  der Schwinger dem Erreger um  $\pi$  (180°) hinterherläuft. Er schwingt somit gegenphasig.

# Eigenfrequenzen harmonischer Schwingungen

## Einleitung

Wir haben am Beispiel des horizontalen Masse-Feder-Schwingers gesehen, dass wir für eine Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung ist, eine (durch Sinus und Cosinus beschreibbare) harmonische Schwingung erhalten. Wir wollen nun in diesem Abschnitt zeigen, dass für verschiedene weitere experimentelle Situationen eine harmonische (bzw. fast harmonische) Schwingung entsteht.

Die mathematischen Herleitungen gelten sowohl für Kräfte als auch für Drehmomente ...

$$F_R[t] = -k x[t] \quad \text{UND} \quad \text{Grundgesetz der Dynamik} \quad F_R[t] = m a[t] = m x''[t]$$

Achtung: hier wird  $x$  statt  $y$  verwendet.

$$M_R[t] = -D \varepsilon[t] \quad \text{UND} \quad M_R[t] = J \alpha[t] = J \varepsilon''[t]$$

Achtung:  $\varepsilon$  ist hier der Drehwinkel

Ein zentraler Punkt ist: Wenn wir das System mathematisch mit der Differentialgleichung ...

$$\ddot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

darstellen können, dann können wir die in den vorigen Abschnitten getätigten Aussagen über gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen eins zu eins übernehmen. Die Mathematik muss einmal erarbeitet werden und kann auf viele verschiedene Fälle angewendet werden.

Die Wurzel aus dem Faktor, der vor  $y[t]$  steht, ergibt die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ .

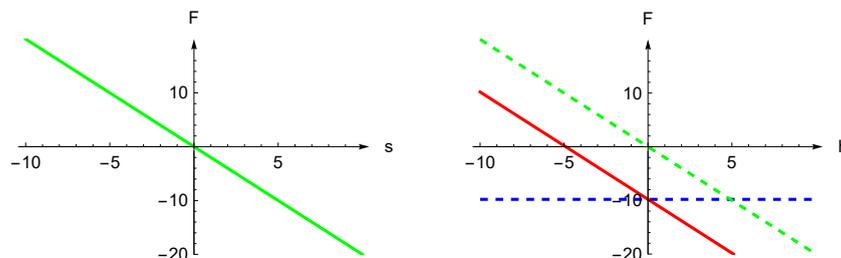
## Horizontaler und Vertikaler Masse-Feder-Schwinger

Wir haben gesehen, dass beim horizontalen Masse-Feder-Schwinger die Energie zwischen Federspannergie und Bewegungsenergie hin- und herwechselt. Wie sieht dies nun beim vertikalen Masse-Feder-Schwinger aus, bei der sich auch noch die potentielle Energie der Lage (Höhe) kontinuierlich ändert.

Wenn das Masse-Feder Pendel **horizontal** schwingt, gibt es nur die zeitlich variierende Federspannergie  $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} k y[t]^2$  und die Bewegungsenergie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v[t]^2$ .

Wenn das Masse-Feder Pendel **vertikal** schwingt, dann gibt es zusätzlich die potentielle Energie der Lage  $E_{\text{Lage}} = m g h[t]$  zu berücksichtigen, da die Masse während des Auf- und Abschwingens seine potentielle Energie der Lage ändert.

Wir können dies mithilfe des Kraft-Auslenkung-Diagramms erläutern. Die Gravitationskraft ist praktisch konstant ( $F = m g$ ) und die angehängte Masse lenkt die Feder nach unten aus (und erhöht die rücktreibende Federkraft) ...



### Abbildung

- links: Federkraft (grün) beim horizontalen Schwinger  
 rechts: Federkraft (grün strichliert), Gewichtskraft (blau strichliert, konstant)  
 resultierende Kraft (rot) beim vertikalen Schwinger

## Horizontaler Schwinger - Kräfte

$$F_{\text{Feder}} = -k s$$

Wenn sich die Masse in positiver Richtung (nach rechts) ausgelenkt wird, wirkt eine (negative) Kraft in die Gegenrichtung.

Wenn die Masse in negativer Richtung ausgelenkt wird, wirkt eine positive Kraft in die Gegenrichtung.

## Vertikaler Schwinger - Kräfte (Höhe $h$ wird positiv nach oben gemessen)

$$F_{\text{Feder}} = -k h \quad F_{\text{Gewicht}} = -m g \quad F_{\text{gesamt}} = -k h - m g$$

Hier wirkt zusätzlich zur Federkraft (grün strichliert) die konstante Gewichtskraft nach unten (d.h. negatives  $F$  - blau strichliert).

Die Gesamtkraft (rot) ergibt sich durch Addition der beiden Kräfte. Die Gleichgewichtslage ( $F = 0$ ) wird im Vergleich zur Feder allein (d.h. ohne angehängte Masse) nach unten (d.h. negatives  $h$ ) verschoben.

Wir haben Gleichgewicht, wenn die Gesamtkraft gleich 0 ist ...

$$F_{\text{gesamt}} = -m g - k h_0 = 0 \quad \text{Gesamtkraft gleich 0}$$

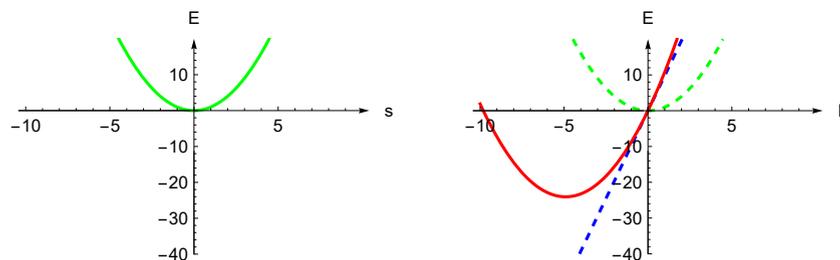
$$\rightarrow h_0 = -\frac{m g}{k} \quad \text{neue Gleichgewichtslage}$$

Die Rückstellkraft ist weiterhin proportional zur Auslenkung, aber bezogen auf die neue Gleichgewichtslage (auf  $h = -5$  bei der Abbildung oben). Die Steigung  $k$  ist die gleiche.

Die Berücksichtigung der Schwerkraft führt nur zu einer Verschiebung der Gleichgewichtslage.

## Untersuchung der Energien

Wir können auch noch die potentielle Energie für die beiden Schwinger einzeichnen ...



**Abbildung** links:  $E_{\text{Feder}}$  (grün) beim horizontalen Schwinger  
rechts:  $E_{\text{Feder}}$  (grün strichliert),  $E_{\text{Lage}}$  (blau strichliert)  
 $E_{\text{Feder}} + E_{\text{Lage}}$  (rot)

Es gilt für den horizontalen Schwinger:  $E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} k s^2$

Es gilt für den vertikalen Schwinger:  $E_{\text{Feder+Lage}} = \frac{1}{2} k h^2 + m g h$

Dabei wird sowohl für die Federspannenergie als auch für die potentielle Energie der Energienullpunkt ( $h = 0$ ) bei der unbelasteten Feder ohne Schwinger definiert. Der Ausdruck  $E_{\text{Feder+Lage}}$  hat (weiterhin) die Form einer Parabel. Der Scheitelpunkt hat sich jedoch verschoben. Mit Hilfe des quadratischen Ergänzens können wir diesen Ausdruck auf die Scheitelpunktform bringen ...

$$\begin{aligned} E_{\text{Feder+Lage}} &= \frac{1}{2} k h^2 + m g h = \frac{1}{2} k \left( h^2 + 2 \frac{m g}{k} h \right) = \frac{1}{2} k \left( \left( h + \frac{m g}{k} \right)^2 - \left( \frac{m g}{k} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} k \left( h + \frac{m g}{k} \right)^2 - \frac{m^2 g^2}{2 k} \end{aligned}$$

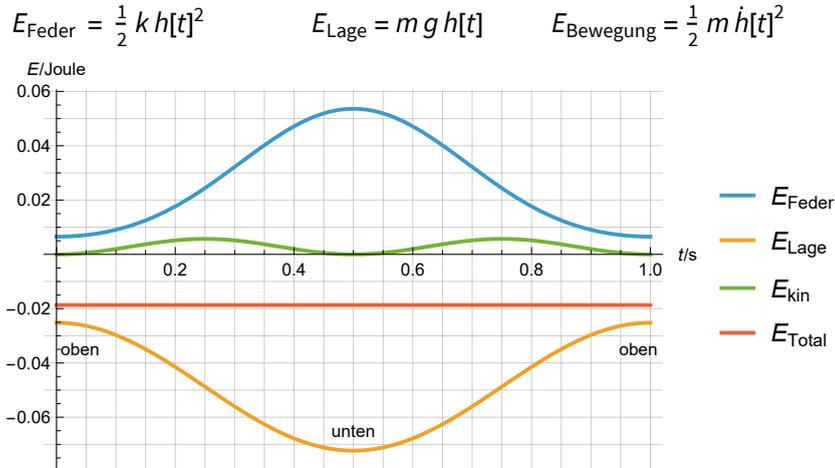
Der Scheitelpunkt der Parabel (d.h. die Gleichgewichtslage) hat nun die neuen Koordinaten ...

$$E_{\text{Feder+Lage, min}} = \left\{ -\frac{m g}{k}, -\frac{m^2 g^2}{2 k} \right\}$$

Wenn wir nun den Schwinger um diese neue Gleichgewichtslage schwingen lassen ...

$$h[t] = -\frac{mg}{k} - \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0]$$

haben wir den folgenden Wechsel der Energien ...



**Abbildung** Verlauf der Energien beim vertikalen Masse-Feder-Schwinger

- Der Schwinger wird anfänglich nach oben ausgelenkt und dann losgelassen ( $t = 0$  s).
- Dies sieht man daran, dass die Energie der Lage am Anfang am grössten ist. Sie ist jedoch nicht gleich 0, da  $E = 0$  für die entspannte Feder ohne angehängte Masse angenommen wird.
- Dann bewegt sich der Schwinger nach unten und die Energie der Lage nimmt ab, bis der Schwinger ganz unten angekommen ist.
- Durch die Abwärtsbewegung wird auch die Feder mehr gespannt und die Energie der Feder nimmt zu, bis der Körper ganz unten angekommen ist.
- Ebenso nimmt die Bewegungsenergie zu. Aber nur bis zum Überschreiten der (neuen) Gleichgewichtslage, dann nimmt die Bewegungsenergie wieder ab, bis sie ganz unten angekommen ist und die Geschwindigkeit 0 hat.
- usw.

Die Summe der potenziellen Energien lauten nun ...

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k h[t]^2 + m g h = \frac{1}{2} k \left( \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0] - \frac{mg}{k} \right)^2 + m g h[t]$$

Im Schulbereich wird häufig an Stelle der korrekten roten Parabel die Formel für die strichlierte grüne Parabel verwendet ...

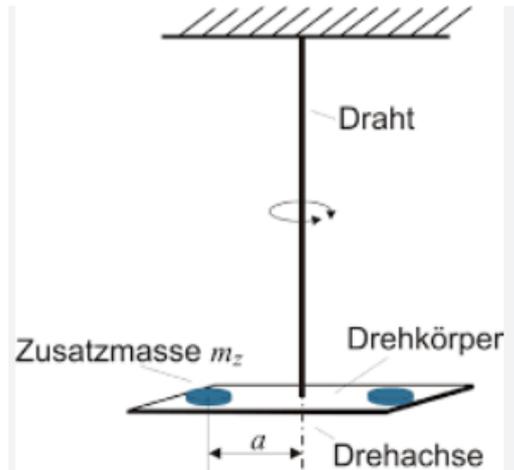
$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k y[t]^2 = \frac{1}{2} k \left( \hat{y} \sin[\omega t + \varphi_0] \right)^2$$

Aber Achtung:

- Die Auslenkung/Höhe  $y$  wird ab der neuen Gleichgewichtslage gemessen (und nicht dort wo die Federspannenergie gleich 0 ist)
- Der Ausdruck  $\frac{1}{2} k y^2$  beinhaltet sowohl die potentielle Energie der Feder als auch die potentielle Energie der Lage.
- Die potentielle Energie der Lage kommt nicht mehr explizit vor!

Dies ist aber sehr verwirrend und auf die Wahl des Energienullpunkts zurückzuführen!

## Drehpendel (Torsionspendel)



**Abbildung** Drehpendel ([Link](#))

Bei einem Drehpendel bzw. Torsionspendel ([Link](#)) wird durch die Drehung des Körpers ein rückstellendes Drehmoment ausgeübt. Wenn das Drehmoment  $M$  proportional zum Drehwinkel  $\varepsilon$  ist,

$$M = -D \varepsilon$$

$D$  Winkelrichtgröße

führt das auch auf eine harmonische Schwingung. Denn auf Grund der Gleichung für das Drehmoment  $M$ .

$$M = J \alpha$$

$J$  Trägheitsmoment

$\alpha$  Winkelbeschleunigung

erhalten wir wieder Formeln, die mathematisch analog zu den Formeln der ungedämpften Masse-Feder-Schwingung sind ...

$$-D \varepsilon[t] = J \alpha[t]$$

$$\ddot{\varepsilon}[t] + \frac{D}{J} \varepsilon[t] = 0$$

Und diese Analogie führt dann auf die Eigenkreisfrequenz ...

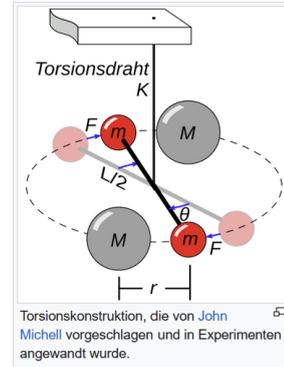
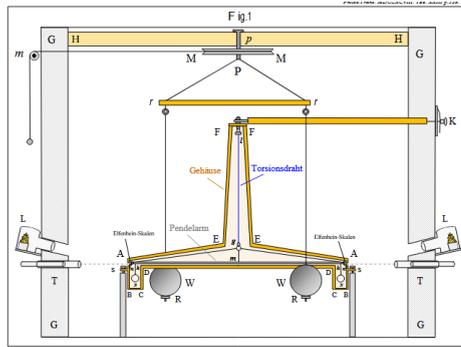
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

## Experiment von Cavendish

Mit Hilfe einer empfindlichen Drehwaage (Torsionswaage, Gravitationswaage oder Cavendish-Experiment) bestimmte Henry Cavendish (1731 - 1810, [Link](#)) die mittlere Dichte der Erde.

Diese Drehwaage kann auch dazu benutzt werden, die Gravitationskonstante  $G$  zu bestimmen.

*Henry Cavendish konnte 112 Jahre nach der Veröffentlichung des Gravitationsgesetzes von Isaac Newton im Jahre 1686 mit seiner Torsionsdrehwaage erstmals die Gravitationswirkung zwischen zwei irdischen Körpern zeigen, nämlich der Anziehung zwischen der kleinen Bleikugel und der großen Bleikugel. Außerdem war es ihm möglich, mit Hilfe der Messdaten, die er während seiner Beobachtungen ermittelte, den Zahlenwert der dabei wirksamen Gravitationskräfte zu bestimmen. (Jochen Sicars, [Link](#))*



**Abbildung** Versuchsaufbau des Cavendish-Experiments (Link, Link).

Das Experiment geht folgendermassen ...

- In der Mitte der Apparatur hängt ein 1.9 Meter langer Draht, an dem horizontal ein Stab der Länge  $L$  angebracht ist.
- Am Stab sind in der Mitte ein Spiegel und an den Enden zwei kleine Massen  $m$  mit je 0.73 kg befestigt.
- Man positioniert zwei grosse Massen  $M$  mit je 158 kg in der Nähe der kleinen Probmassen und auf gegenüberliegenden Seiten (siehe Abbildung).
- Die Anziehungskraft (zirka 150 nN) zwischen den grossen und kleinen Massen (mit Abstand  $r$ ) verursacht ein Drehmoment  $M = G \frac{mM}{r^2} L$  (wir vernachlässigen die Anziehung zwischen den kleinen und den gegenüberliegenden grossen Massen) und dies führt zu einer Drehbewegung (mit Drehoment  $M = D \theta$ ) bzw. einer gedämpften Drehschwingung um die Gleichgewichtslage (mit einer Dauer von zirka 14 Minuten).
- Zunächst müssen die Grössen  $m, M, L, r$  gemessen werden.

- Mit Hilfe der bekannten Beziehungen  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  und  $J = 2m(\frac{L}{2})^2$  folgt ...

$$D = \frac{4\pi^2 J}{T^2} = \frac{4\pi^2 2m(\frac{L}{2})^2}{T^2} = \frac{\pi^2 2mL^2}{T^2}$$

Nun kann durch eine Messung der Periodendauer  $T$  das Richtmoment  $D$  des Fadens bestimmt werden.

- Mit Hilfe des Gleichgewichts der beiden Drehmomente  $G \frac{mM}{r^2} L = D \theta$  folgt ...

$$G = \frac{D \theta r^2}{mML} = \frac{\frac{\pi^2 2mL^2}{T^2} \theta r^2}{mML} = \frac{2\pi^2 L \theta r^2}{M T^2}$$

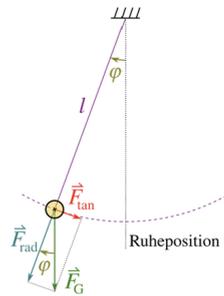
Nun kann durch eine Messung des Drehwinkels  $\theta$  (mit Hilfe des angebrachten Spiegels) die Gravitationskonstante  $G$  bestimmt werden.

- Der Versuch wird zur Erhöhung der Genauigkeit mit anderen Massen und Abständen wiederholt.

Cavendish interessierte sich für die Berechnung der Masse und der Dichte der Erde. Später wurde aus den Aufzeichnungen von Cavendish die Gravitationskonstante berechnet. Zu seiner Zeit fand die Gravitationskonstante kein allgemeineres Interesse.

## Mathematisches Pendel (Fadenpendel)

Das mathematische Pendel ist ein idealisiertes Pendel mit einer punktförmigen Masse, die an einem masselosen Faden der Länge  $l$  hängt und ohne Reibung unter dem Einfluss einer konstanten Gravitationskraft hin- und herschwingt.



**Abbildung** Mathematisches Pendel ([Link](#))

Die Gravitationskraft ...

$$F_G = m g$$

kann in zwei senkrecht zueinander stehende Kräfte zerlegt werden ...

$$F_{\text{radial}} = m g \cos[\varepsilon]$$

Kraft wirkt in Richtung des Fadens und spannt den Faden

$$F_{\text{tangential}} = m g \sin[\varepsilon]$$

Rückstellkraft  $\rightarrow$  Drehmoment

Wir verwenden hier (wie in der Merkhilfe) für den Winkel das Formelzeichen  $\varepsilon$ . Die Rückstellkraft ist hier nicht proportional zur Auslenkung. Für kleine Winkel (d.h. für zirka  $\varepsilon < 8^\circ$ ) können wir jedoch die folgende Approximation durchführen (siehe Anhang E) ...

$$\sin[\varepsilon] \approx \varepsilon$$

falls der Winkel in Radiant angegeben wird.

Wir erhalten deshalb nur für kleine Winkel eine annähernd harmonische Schwingung.

Die Eigenkreisfrequenz können wir berechnen, indem wir die Auslenkung sowohl mit Hilfe des Drehwinkels als auch mit Hilfe der Bogenlänge beschreiben.

### Drehwinkel für die Auslenkung

Wir haben die folgenden Größen ...

$$\text{Drehmoment} \quad M = -F_{\text{tangential}} l = -m g \sin[\varepsilon] l \approx -m g \varepsilon l$$

$$\text{Trägheitsmoment} \quad J = m l^2$$

$$\text{Bewegungsgesetz} \quad M = J \alpha = J \ddot{\varepsilon}$$

Gleichsetzen der Drehmomente liefert ...

$$-m g \varepsilon l = m l^2 \ddot{\varepsilon}[t]$$

$$\ddot{\varepsilon}[t] + \frac{g}{l} \varepsilon[t] = 0$$

Daraus erhalten wir die Eigenkreisfrequenz ...

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### Bogenlänge für die Auslenkung

Analog können wir mit der Bogenlänge  $b$  und der Rückstellkraft  $F_{\text{tangential}}$  arbeiten ...

$$\text{Rückstellkraft} \quad F_{\text{tangential}} = -mg \sin[\varepsilon] = -mg \sin\left[\frac{b}{l}\right] \approx -mg \frac{b}{l}$$

$$\text{Bewegungsgesetz} \quad F = m a_{\text{tangential}} = m \ddot{b}$$

Gleichsetzen der Kräfte liefert ...

$$-mg \frac{b}{l} = m \ddot{b}$$

$$\ddot{b}[t] + \frac{g}{l} b[t] = 0$$

Daraus erhalten wir (natürlich) die gleiche Eigenkreisfrequenz ...

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### Ergebnis

Das Pendel schwingt mit einer von der Länge abhängigen Periodendauer  $T$  ...

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pendellänge / m	Periodendauer / s
0.1	0.634
0.2	0.897
0.3	1.100
0.5	1.420
0.8	1.740
1.0	2.010
1.5	2.460
2.0	2.840
5.0	4.490
10.0	6.340

Wir können die obige Gleichung auch nach der Länge  $l$  auflösen ...

$$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$$

Diese Gleichung liefert uns die Länge für ein Pendel mit einer gewünschten Periodendauer.

#### ABER: Fehler auf Grund des Ortes

Die Periodendauer hängt gemäss obiger Formel nur von der Pendellänge  $l$  und der Erdbeschleunigung  $g$  ab. Die Erdbeschleunigung ist jedoch ortsabhängig.

- Auf Meeresniveau und auf mittleren Breiten beträgt sie  $9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  und wurde als Normfallbeschleunigung definiert.
- Am Äquator beträgt sie  $9.7803 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- Am Pol beträgt sie  $9.8322 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Jeder Ort hat deshalb eine leicht andere Periodendauer-Pendellänge Beziehung.

### ABER: Fehler auf Grund der Amplitude

Wir haben bei der Herleitung der obigen Formel für  $T$  die Kleinwinkelnäherung  $\sin[\varepsilon] = \varepsilon$  verwendet. Dadurch entsteht ein Fehler, der bei genauen Messungen berücksichtigt werden muss.

- Bei einer Amplitude von  $2^\circ$  beträgt die Abweichung zirka 0.02 %
- Ein Uhrenpendel mit einer Schwingungsamplitude von  $31^\circ$  würden gegenüber einer Uhr mit einer Amplitude von  $30^\circ$  täglich 100 Sekunden verlieren.
- Bei Amplituden von  $11^\circ$  und  $10^\circ$  liegt dieser Fehler bei 35 Sekunden.
- Die Uhr mit der grösseren Amplitude braucht länger, da die effektiv rücktreibende Kraft wegen  $\sin[\varepsilon] < \varepsilon$  kleiner ist als die bei der Herleitung angenommene und diese Abweichung mit Zunahme des Winkels immer grösser wird.

### Sekundenpendel

Ein Sekundenpendel ist ein Pendel, das für eine **Halbschwingung** genau **eine Sekunde** benötigt. Gemäss obiger Tabelle hat ein Sekundenpendel mit der Periodendauer 2 s somit eine Pendellänge von zirka 1 Meter.

Exakt (mit der Normfallbeschleunigung  $g$ ) ...

$$l = \left(\frac{2s}{2\pi}\right)^2 g = \left(\frac{2s}{2\pi}\right)^2 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.993961 \text{ m}$$

Interessante Ausführungen können unter [Link](#) oder [Link](#) gefunden werden.

### Synchron nach mehreren Schwingungen

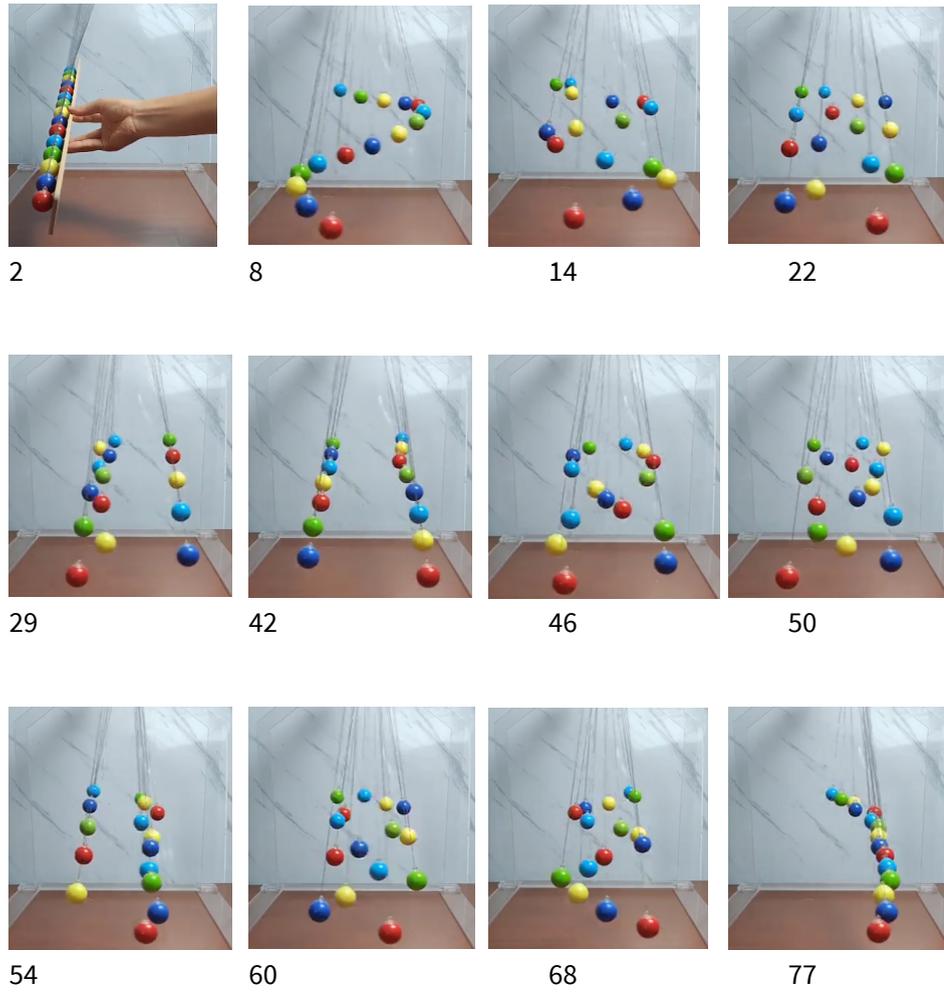
Ein schönes Experiment besteht darin, eine grössere Anzahl von Pendelschwingern mit einer bestimmten Länge, gleichzeitig auszulenken und frei schwingen zu lassen. Bei geeigneter Länge der verschiedenen Pendel werden sie nach  $x$ - Sekunden wieder synchron wie am Anfang schwingen.

In der Abbildung auf der nächsten Seite sind insgesamt 15 Kugeln, die nach zirka 77 Sekunden wieder (fast) im Gleichtakt schwingen. Die hinterste hellblaue Kugel führt 77 Schwingungen aus, die vorderste rote 63 Schwingungen.

Dies führt auf folgende Pendellängen ...

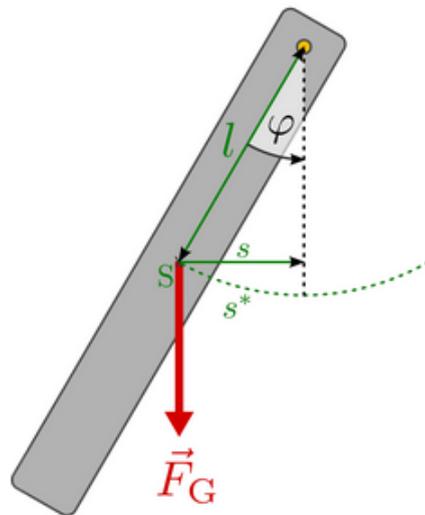
Kugel	Anzahl Perioden	Periodendauer / s	Pendellänge / m
1	63	1.222	0.371
2	64	1.203	0.360
3	65	1.185	0.349
4	66	1.167	0.338
5	67	1.149	0.328
6	68	1.132	0.319
7	69	1.116	0.309
8	70	1.100	0.301
9	71	1.085	0.292
10	72	1.069	0.284
11	73	1.055	0.276
12	74	1.041	0.269
13	75	1.027	0.262
14	76	1.013	0.255
15	77	1.000	0.248

Wir sehen, dass die Pendellängen recht genau aufeinander abgestimmt werden müssen.



**Abbildung** Auslenkungen der Kugeln zu verschiedenen Zeiten in Sekunden ([Link](#))  
Am Schluss sind die Kugeln nicht ganz synchron.  
Das entsprechende Experiment im Technorama ist diesbezüglich besser.

## Physikalisches Pendel



**Abbildung** Physikalisches Pendel ([Link](#))  $\varphi \rightarrow \varepsilon$  (unsere Bezeichnung)

Beim physikalischen Pendel haben wir nicht eine punktförmige Masse und einen masselosen Faden, sondern einen ausgedehnten Körper, der um einen Drehpunkt schwingen kann. Wir führen wieder die Approximation des Sinus durch ...

Drehmoment	$M = -F_G s = -F_G \cdot l \cdot \sin[\varepsilon] = -m g \sin[\varepsilon] l \approx -m g \varepsilon l$	denn: Drehmoment = Kraft mal Hebelarm
Trägheitsmoment	$J_D$	des Körpers bezüglich des Drehpunkts
Bewegungsgesetz	$M = J \alpha = J \ddot{\varepsilon}$	

Dabei ist  $s$  der Hebelarm, der Abstand des Schwerpunkts vom Lot durch den Drehpunkt.

Gleichsetzen der Drehmomente liefert ...

$$-m g \varepsilon l = J_D \ddot{\varepsilon}[t]$$

$$\ddot{\varepsilon}[t] + \frac{m g l}{J_D} \varepsilon[t] = 0$$

Daraus erhalten wir die Eigenkreisfrequenz ...

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{J_D}}$$

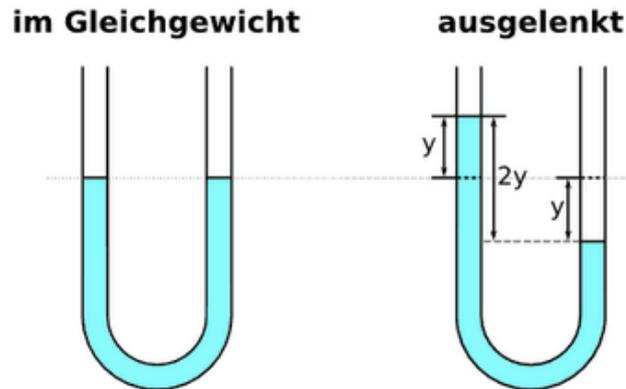
Wir können mit Hilfe dieser Gleichung das Trägheitsmoment  $J_S$  eines Körpers bezüglich seines Schwerpunkts bestimmen. Denn gemäss des Satzes von Steiner, gilt ...

$$J_D = J_S + m l^2$$

Und weiter ...

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{J_D}} = \sqrt{\frac{m g l}{J_S + m l^2}} \rightarrow J_S = \frac{m g l}{\omega_0^2} - m l^2$$

## Flüssigkeitsschwingung (Wasserpendel)



**Abbildung** Flüssigkeitsschwingung ([Link](#))

Wenn die Flüssigkeitssäule um die Höhe  $y$  ausgelenkt ist, drückt die überstehende Säule auf das System bzw. die gesamte Wassersäule ...

$$F_R = -m_{\ddot{u}} g = -\rho A 2 y g$$

$m_{\ddot{u}}$  mit überstehender Masse,  
 $\rho$  Dichte der Flüssigkeit,  
 $A$  Querschnittsfläche der Flüssigkeitssäule,  
 $g$  Erdbeschleunigung

Die rücktreibende Kraft ist wiederum proportional zur Auslenkung und in die Gegenrichtung zur Auslenkung. Wir erhalten eine harmonische Schwingung.

Die gesamte Flüssigkeit, die bewegt werden soll, hat die Masse  $m_{\text{Flüssigkeit}}$  ...

$$m_{\text{Flüssigkeit}} = \rho A l \quad l \text{ ist die totale Länge der Flüssigkeitssäule}$$

Mit Hilfe des Bewegungsgesetzes  $F_R = m_{\text{Flüssigkeit}} a = m_{\text{Flüssigkeit}} \ddot{y}$  erhalten wir ...

$$-\rho A 2 y g = \rho A l \ddot{y}$$

und nach Kürzen (von  $\rho A$ ) und umstellen ...

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l} y = 0$$

Damit ergibt sich die Eigenkreisfrequenz zu ...

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

# Anhang

# Anhang A Experimente

## Fadenpendel

Weiter vorne haben wir hergeleitet, dass die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  eines Fadenpendels die folgende Formel hat ...

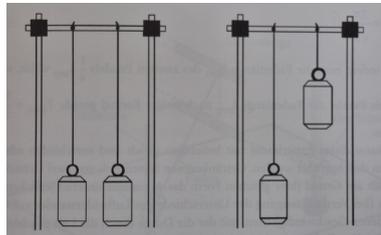
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

und für die Periodendauer gemäss  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  gilt ...

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Je länger die Schnur, desto länger die Periodendauer.

### Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels



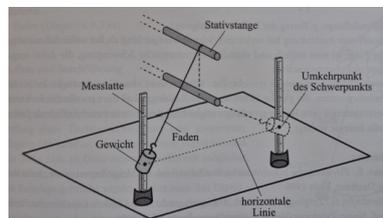
Hilscher 1.86

**Abbildung** Demonstration der Formel  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Wir stellen fest ...

- Die Masse hat keinen Einfluss auf die Periodendauer.
- Die Periodendauer hängt von der Länge des Fadens ab. Doppelte Länge heisst  $\sqrt{2}$  mal längere Periode.
- Die Periodendauer hängt nicht von der anfänglichen Auslenkung ab (falls der Winkel nicht allzu gross ist).
- Die Periodendauer ist ortsabhängig, da die Erdbeschleunigung  $g$  ortsabhängig ist.

### Das Galilei'sche Pendel



Hilscher 1.87

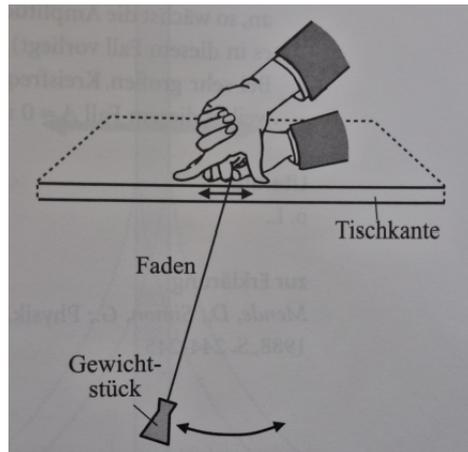
**Abbildung** Galilei'sches Pendel

Wir stellen fest ...

- Der Körper erreicht links und rechts die gleiche Höhe (gleiche Lageenergie) bei unterschiedlichen Auslenkungswinkel.
- Die Periodendauer setzt sich aus den zwei Teilperioden zusammen ...

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2} + \frac{2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \left( \sqrt{l_1} + \sqrt{l_2} \right)$$

## Resonanz beim Fadenpendel

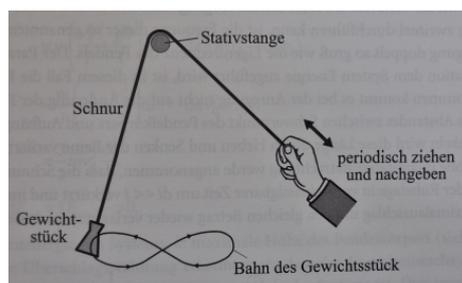


Hilscher 1.88

### Abbildung Resonanz

Wenn die erregende Frequenz gleich der Eigenfrequenz des Pendels ist, erhalten wir eine maximale Amplitude.

## Wie schaukelt man richtig



Hilscher 1.91

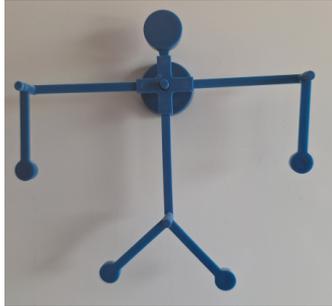
### Abbildung Energieübertragung

Wenn zum richtigen Zeitpunkt an der Schnur gezogen (und dann wieder nachgegeben wird), erreicht man eine maximale Energieübertragung.

- Die richtigen Zeitpunkte sind zum Ziehen beim Durchlaufen der Gleichgewichtslage und zum Nachgeben beim Maximalausschlag.
- Beim Ziehen in der Gleichgewichtslage leistet man Arbeit  $W = \left(m \frac{v^2}{l} + m g\right) \cdot \Delta l$  gegen die Zentrifugalkraft und gegen die Gewichtskraft.
- Beim Verlängern der Schnur beim Maximalausschlag leistet das System Arbeit  $W = m g \cos[\varphi_{\max}]$  auf Grund der Gewichtskraft.
- Da die hineingesteckte Arbeit grösser ist als die vom System abgegebene Arbeit, nimmt die Energie des Systems mit jeder Schwingung zu.
- Das System muss anfänglich schon eine Energie haben. Aus der Ruhelage funktioniert dies nicht - auch nicht bei einer Schaukel. Sitzt man auf einer Schaukel kann man die Ruhelage ohne äussere Einwirkung nicht verlassen, solange Reibungseffekte nicht berücksichtigt werden.

In der spanischen Wallfahrtskirche von Santiago de Compostella (Endpunkt des Jakobswegs) wird mittels oben beschriebener Verstärkung ein an der Kirchendecke aufgehängtes Weihrauchfass von ein paar Männern über ein Seil so in Schwingung versetzt, dass es schliesslich fast einen 180° Winkel beschreibt. Die Länge des Pendels führt zu einer grossen Geschwindigkeit und auf Grund der grossen Sauerstoffzufuhr durch den grossen Luftzug wird die Holzkohle zum Glühen gebracht.

## Chaotisches Pendel

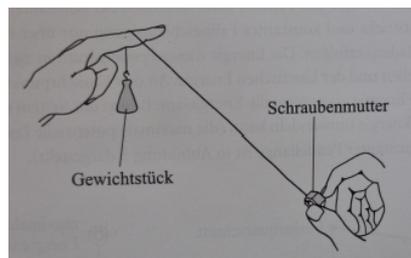


**Abbildung** Chaotisches Pendel

Es ist nicht möglich den Schwinger so auszulenken, dass 2-mal der gleiche Verlauf erzielt wird. Das Pendel ist chaotisch.

## Energieübertragung bei Schwingungen

### Die anhängliche Schnur

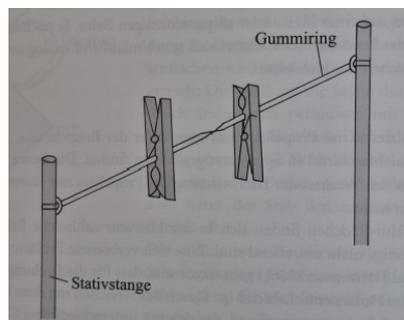


Hilscher 1.92

**Abbildung** Übertragung von Energie auf ein Fadenpendel

Das fallende Gewicht verkürzt die Länge des Fadens und führt gleichzeitig dem Pendel Energie zu. Das Pendel wird schneller und steigt höher und wickelt sich um den Finger. Wenn die Reibungskräfte gross genug sind, wird das Fallen des Gewichtsstücks gestoppt.

### Die schwingenden Wäscheklammern

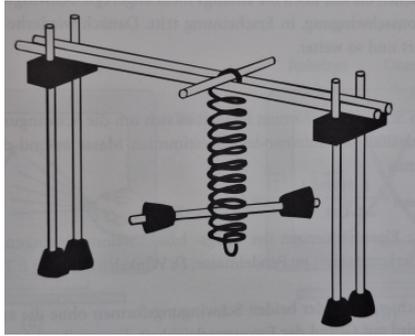


Hilscher 1.95

**Abbildung** Kopplung von Schwingungen

Wenn nur eine Wäscheklammer ausgelenkt wird und zum Schwingen gebracht wird, dann geht allmählich die Schwingung auf die andere Wäscheklammer über und die eine kommt zur Ruhe.

## Hin und her und rauf und runter



Hilscher 1.97

**Abbildung** Kopplung von Längs- und Torsionsschwingung einer Schraubenfeder

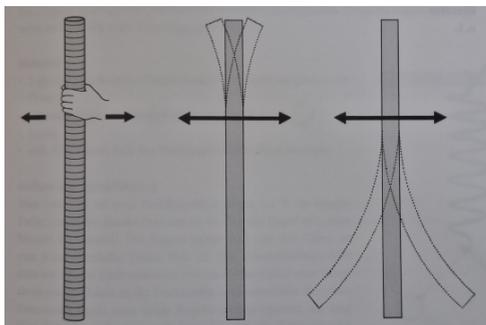
Die Energie geht von der Längsschwingung in die Torsionsschwingung über, wenn die Eigenfrequenzen aufeinander abgestimmt sind.

Die Torsionsschwingung hat die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$

Durch Veränderung der Position der angebrachten Stößel lässt sich das Drehmoment ändern und somit lassen sich die Eigenfrequenzen aufeinander abstimmen.

## Unterputzröhre

### Resonanz an der Unterputzröhre



Hilscher 1.89

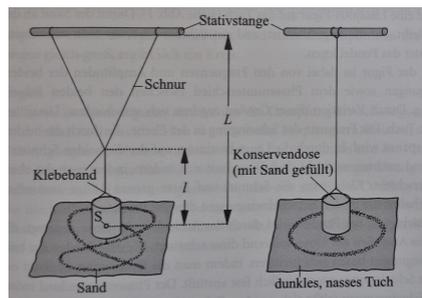
**Abbildung** Unterschiedliche Resonanzfrequenzen

Auf Grund der unterschiedlichen Längen der Teile oberhalb und unterhalb der Hand, haben diese Teile unterschiedliche Eigenfrequenzen und somit auch unterschiedliche Resonanzfrequenzen.

Durch das Hin- und Herbewegen der Hand werden Schwingungen angeregt. Die beiden Teile geraten bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen in Resonanz. Wenn der eine Teil mitschwingt, ist der andere fast in Ruhe.

## Überlagerung

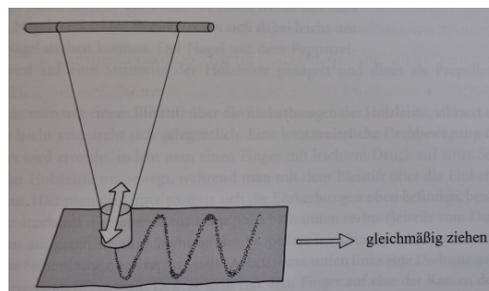
### Lissajous-Figuren aus Sand



Hilscher 1.93

**Abbildung** Überlagerung von Schwingungen (Lissajou Figuren)

Der Schwinger kann in zwei Richtungen ausgelenkt werden. Bei einem Verhältnis der beiden Eigenfrequenzen, das mit ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, entsteht eine periodische Schwingung.



Hilscher 1.93

**Abbildung** Erzeugen der Sinusfunktion

Dieser Schwinger kann auch benutzt werden, den Verlauf der Auslenkung (Sinus) darzustellen, indem das Papier unterhalb des Schwingers gleichmäßig bewegt wird.

## Anhang B Quellen

Um sich schnellstmöglich ein Bild zu machen, wo die für das Kapitel “Mechanische Schwingungen” relevanten Themen im **Kuchling** und in den beiden **Merkhilfen** gefunden werden können, ist in diesem Anhang eine detaillierte Auflistung gegeben.

Viele weitere Quellen (insbesondere frei zugängliche Wikipedia Artikel) wurden direkt im Text integriert.

Als Quelle für die Experimente diente das Buch ...

- Helmut Hilscher et al, “Physikalische Freihandexperimente - Band 1 - Mechanik”, 2018 (5. Auflage)

### H. Kuchling, “Taschenbuch der Physik”, 2022 (22. Auflage), 714 Seiten

Der für das Kapitel “Mechanische Schwingungen” relevante Teil ist Kapitel 13 (ohne 13.5, 13.6)

13. Mechanische harmonische Schwingungen	Seiten 195 - 231
13.1 Ungedämpfte harmonische Schwingung	
13.1.1 Phasenwinkel	
13.1.2 Elongation	
13.1.3 Geschwindigkeit	
13.1.4 Beschleunigung	
13.1.5 Rückstellkraft	
13.2 Eigenfrequenz der ungedämpften harmonischen Schwingung	
13.2.1 Schwingungsgleichung	
13.2.2 Lineare Federschwingung	
13.2.3 Drehschwingung	
13.2.4 Pendelschwingung	
13.2.5 Flüssigkeitsschwingungen	
13.2.6 Schwingungsenergie	
13.3 Freie gedämpfte Schwingung	
13.3.1 Schwingungsgleichung	
13.3.2 Elongation	
13.3.3 Eigenfrequenz	
13.3.4 Aperiodische Bewegung	
13.4 Erzwungene Schwingung	
13.4.1 Schwingungsgleichung	
13.4.2 Elongation	
13.4.3 Resonanz	

### N. Marxer, “Physik Merkhilfe”, 2019, 55 Seiten

Auf den folgenden Seiten können die relevanten Inhalte zum Kapitel “Mechanische Schwingungen” gefunden werden ...

Seite 16-19	Mechanische Schwingungen
Seite 22-23	Superposition (Interferenz)
Seite 54	Winkelfunktionen

## Anhang C Kriechfall (Sinh und Cosh)

### Einleitung

Wir haben im Skript vorne bei der Behandlung des Kriechfalls gesehen, dass wir für die allgemeine Lösung des Kriechfalls einen ähnlichen Ausdruck wie für die allgemeine Lösung der gedämpften Schwingung erhalten ...

$$\begin{array}{lll} \text{gedämpfte Schwingung} & 0 < \delta < \omega_0 & \dot{y} \operatorname{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \text{Kriechfall} & \delta > \omega_0 & \dot{y} \operatorname{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] e^{-\delta t} \quad \omega'_d = \sqrt{|\omega_0^2 - \delta^2|} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{array}$$

Warum können wir für den Kriechfall nicht einfach die allgemeine Lösung für die gedämpfte Schwingung verwenden? Das Problem ist, dass für den Fall  $\delta > \omega_0$  die Kreisfrequenz ...

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\text{negativ}}$$

die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden muss. Wir können den Ausdruck noch umformen ...

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{(-1)(\delta^2 - \omega_0^2)} = \sqrt{-1} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\text{positiv}}$$

Wir haben bei der Umformung benutzt ...

$$\sqrt{-1} = i$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit ist. Das  $\omega_d$  ist somit eine rein imaginäre Zahl. Wir haben den Bereich der reellen Zahlen verlassen und sind im Bereich der komplexen Zahlen.

Wir haben somit das Problem ...

$$\operatorname{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] = \operatorname{Sin}[i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t + \varphi_0]$$

den Sinus eines komplexen Winkel auszurechnen. Was ist das?

### Sinh und Cosh

Wir müssen ein wenig ausholen.

Wir starten mit der berühmten Formel von Leonhard Euler (1707-1783, [Link](#)) für reelle  $x$  ...

$$(1) \quad e^{ix} = \operatorname{Cos}[x] + i \operatorname{Sin}[x] \quad \text{Euler Formel}$$

Diese Formel zeigt, wie die Winkelunktionen Cos und Sin mit der Exponentialfunktion Exp zusammenhängen.

#### Einschub

Wenn wir in die obige Euler Formel  $x = \pi$  einsetzen, dann erhalten wir ...

$$e^{i\pi} = \operatorname{Cos}[\pi] + i \operatorname{Sin}[\pi] = -1 + i * 0$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{Euler Identität}$$

Diese letzte Gleichung wird von vielen als die schönste Formel der ganzen Mathematik bezeichnet. In ihr kommen die wichtigen mathematischen Operationen ...

+	die Addition
*	die Multiplikation
$\square^\square$	die Potenz
=	das Gleichheitszeichen

sowie die elementaren Zahlen der Mathematik ...

0	das neutrale Element der Addition
1	das neutrale Element der Multiplikation
$\pi$	die Kreiszahl
$e$	die Eulerzahl
$i$	die imaginäre Einheit

alle in einer kurzen und prägnanten Formel vor.

Weiter. Einsetzen von  $-x$  in (1) ergibt ...

$$e^{-ix} = \cos[-x] + i \sin[-x]$$

und Ausnutzen der Tatsache, dass Cos eine gerade und Sin eine ungerade Funktion ist ergibt ...

$$(2) \quad e^{-ix} = \cos[x] - i \sin[x]$$

Mittels Addition bzw. Subtraktion können wir die folgenden Beziehungen ableiten ...

$$(1) + (2) \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos[x] \quad (3)$$

$$(1) - (2) \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin[x] \quad (4)$$

Einsetzen von  $ix$  für  $x$  in Gleichung (3) ergibt dann ...

$$(3)' \quad e^{iix} + e^{-iix} = 2 \cos[ix] \quad \text{und mit } i^2 = -1$$

$$e^{-x} + e^x = 2 \cos[ix]$$

$$\cos[ix] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{wird definiert als} \quad \text{Cosh}[x]$$

$\cos[ix]$  eines rein imaginären Winkels ist somit durch den wie oben definierten Cosinus hyperbolicus gegeben.

In ähnlicher Weise können wir die Bedeutung des Sinus eines rein imaginären Winkels ausrechnen aus (4) ...

$$(4)' \quad e^{iix} - e^{-iix} = 2i \sin[ix] \quad \text{und mit } i^2 = -1$$

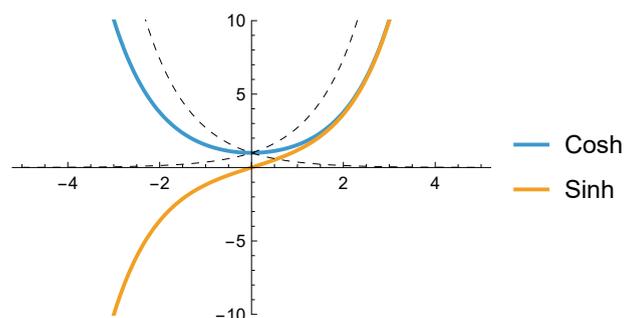
$$e^{-x} - e^x = 2i \sin[ix]$$

$$\sin[ix] = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = \frac{e^x - e^{-x}}{-2i} \quad \text{wird definiert als} \quad \frac{\text{Sinh}[x]}{-i} = i * \text{Sinh}[x]$$

$$\text{d.h.} \quad \text{Sinh}[x] = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin[ix]$  eines rein imaginären Winkels ist somit durch den wie oben definierten Sinus hyperbolicus mal  $i$  gegeben.

Die beiden Funktionen sehen folgendermassen aus.



**Abbildung**

Cosh, Sinh und  $e^x$ ,  $e^{-x}$  (strichliert)

Wir können auch sagen, dass Cosh der gerade und Sinh der ungerade Teil der Exponentialfunktion ist, denn ...

$$\text{Cosh}[x] + \text{Sinh}[x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

Die Exponentialfunktion  $e^x$  kann somit aus zwei Teilen zusammengesetzt werden. Der erste Teil Cosh ist ...

gerade: d.h. liefert den gleichen Wert für  $x$  und  $-x$ ,  
achsensymmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse

und der zweite Teil Sinh ist ...

ungerade: d.h. liefert für  $x$  und  $-x$  Werte, die sich im Vorzeichen unterscheiden,  
punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs  $\{0, 0\}$ .

Für uns sind noch die Ableitungsfunktionen wichtig. Wir erhalten ...

$$\text{Sinh}' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \text{Cosh}$$

$$\text{Cosh}' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \text{Sinh}$$

Das Problem mit dem Sinus und Cosinus haben wir umgangen, indem wir die Funktionen Sinh und Cosh eingeführt haben.

Wir müssen noch untersuchen, ob diese alternativen Funktionen, die Schwingungsdifferentialgleichung in der angegebenen Form auch erfüllen. Dies folgt analog zum Fall der ungedämpften Schwingung (vgl. Anhang F).

## Anhang D Sin[ε] für kleine Winkel

### Approximation von Sin[ε] durch ε

Wir erhalten harmonische Schwingungen, wenn die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung und zurück zur Gleichgewichtslage gerichtet ist.

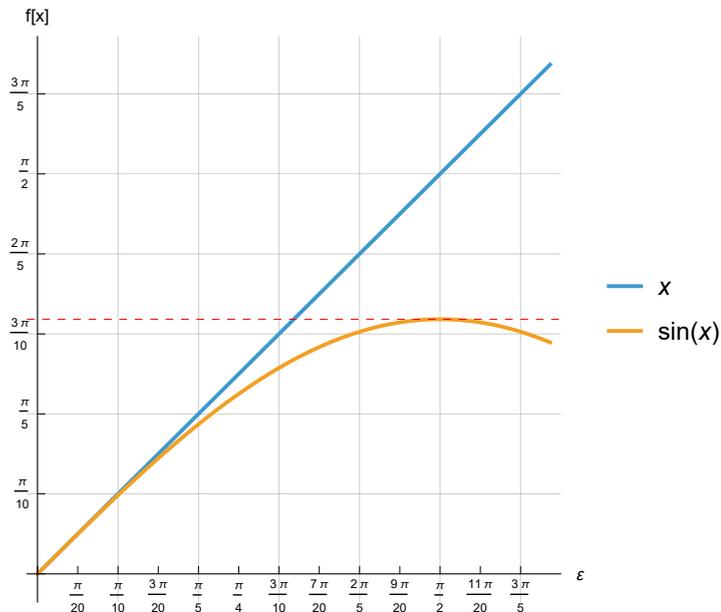
Für das mathematische Pendel und das physikalische Pendel ist die rücktreibende Kraft nicht proportional zur Auslenkung  $\varepsilon$ , sondern proportional zu  $\text{Sin}[\varepsilon]$ .

Für kleine Winkel (gemäss Kuchling für Winkel  $< 8^\circ$ ) können wir jedoch die Approximation ...

$$\text{Sin}[\varepsilon] \approx \varepsilon \quad \text{Winkel in Radiant!}$$

durchführen. Für kleine Winkel bzw. Auslenkungen, erhalten wir somit (fast) harmonische Schwingungen.

Die folgende Abbildung stellt die beiden Funktionen  $\varepsilon$  und  $\text{Sin}[\varepsilon]$  gegenüber ...



**Abbildung** Funktionsgraphen von  $y = \varepsilon$  (blau) und  $y = \text{Sin}[\varepsilon]$  (gelbbraun) sowie  $y = 1$  (rot strichliert)

Wir sehen, dass ab zirka  $\varepsilon \approx \frac{\pi}{10} \text{ rad} = 18^\circ$  eine in der Abbildung sichtbare Abweichung vorkommt.

Wir können die Abweichungen, präziser die relativen Abweichungen  $\frac{\varepsilon - \sin[\varepsilon]}{\sin[\varepsilon]}$  noch genauer mithilfe einer Tabelle untersuchen ...

$\varepsilon / ^\circ$	$\varepsilon / \text{rad}$	$\sin[\varepsilon]$	$\frac{\varepsilon - \sin[\varepsilon]}{\sin[\varepsilon]}$
1	0.0174533	0.0174524	0.0000507714
2	0.0349066	0.0348995	0.000203107
3	0.0523599	0.052336	0.000457072
4	0.0698132	0.0697565	0.000812775
5	0.0872665	0.0871557	0.00127037
6	0.10472	0.104528	0.00183005
7	0.122173	0.121869	0.00249205
8	0.139626	0.139173	0.00325666
9	0.15708	0.156434	0.0041242
10	0.174533	0.173648	0.00509506
11	0.191986	0.190809	0.00616964
12	0.20944	0.207912	0.00734841
13	0.226893	0.224951	0.00863187
14	0.244346	0.241922	0.0100206
15	0.261799	0.258819	0.0115152
16	0.279253	0.275637	0.0131162
17	0.296706	0.292372	0.0148245
18	0.314159	0.309017	0.0166407
19	0.331613	0.325568	0.0185657
20	0.349066	0.34202	0.0206003

In der vierten Spalte muss der Winkel  $\varepsilon$  in Radiant eingegeben werden.

Wir sehen, dass wir bei  $8^\circ$  einen relativen Fehler von zirka 0.326 % machen.

In Wirklichkeit ist die Kraft beim mathematischen und physikalischen Pendel proportional zu  $\sin[\varepsilon]$  und nicht zu  $\varepsilon$  und somit kleiner als angenommen. Die wahre Periodendauer wird also in Wirklichkeit grösser sein als die mit der Approximation ( $\sin[\varepsilon] \rightarrow \varepsilon$ ) berechnete.

# Anhang E Schwingungsdifferentialgleichung lösen

## Freie ungedämpfte Schwingung

Die Differentialgleichung für die freie ungedämpfte Schwingung lautet ...

$$(1) \quad \ddot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion ...

$$(2) \quad y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

eine allgemeine Lösung ist.

Um dies zu zeigen, brauchen wir die folgenden **Regeln aus der Differentialrechnung** (Der Strich ' bedeutet Ableitung nach  $x$ , d.h.  $\frac{d}{dx}$ ) ...

(A)  $(a * f)' = a * f'$  ein konstanter Faktor kann aus der Ableitung herausgezogen werden

(B)  $(f[g[x]])' = f'[g[x]] * g'[x]$  Kettenregel: äussere Ableitung mal innere Ableitung bei verketteten Funktionen

(C)  $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$  Ableitung von Winkelfunktionen

(D)  $(ax + b)' = a$  Ableitung (Steigung) einer Geraden

Mit diesen Regeln erhalten wir aus der Funktion  $y[t]$  in Gleichung (2) die folgenden Ableitungen nach der Zeit ...

$$(3) \quad \dot{y}[t] = \frac{d}{dt} (\hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]) \stackrel{(A)}{=} \hat{y} \frac{d}{dt} (\sin[\omega_0 t + \varphi_0]) \\ \stackrel{(B)}{=} \hat{y} (\cos[\omega_0 t + \varphi_0]) \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \varphi_0) \stackrel{(D)}{=} \hat{y} \cos[\omega_0 t + \varphi_0] * \omega_0$$

$$(4) \quad \ddot{y}[t] = \frac{d}{dt} (\dot{y}[t]) \stackrel{(3)}{=} \frac{d}{dt} (\hat{y} \cos[\omega_0 t + \varphi_0] * \omega_0) \stackrel{(A)}{=} \hat{y} \omega_0 \frac{d}{dt} (\cos[\omega_0 t + \varphi_0]) \\ \stackrel{(C,B)}{=} \hat{y} \omega_0 (-\sin[\omega_0 t + \varphi_0]) \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \varphi_0) \\ \stackrel{(D)}{=} \hat{y} \omega_0 (-\sin[\omega_0 t + \varphi_0]) * \omega_0 = -\hat{y} \omega_0^2 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Wir sehen, dass die Funktion (2) die Differentialgleichung (1) erfüllt.

## Freie gedämpfte Schwingung

Die Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung ist etwas komplizierter, da sie auch einen Dämpfungsterm enthält ...

$$(1) \quad \ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion ...

$$(2) \quad y[t] = \dot{y}^* \text{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] e^{-\delta t}$$

eine allgemeine Lösung ist.

Zusätzlich zu den Differentialregeln des vorigen Abschnitts brauchen wir noch die folgenden **Regeln** ...

$$(E) \quad (f * g)' = f' g + f g' \quad \text{Produktregel}$$

$$(F) \quad (e^x)' = e^x \quad \text{Ableitung der Exponentialfunktion}$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x} \quad \text{das negative Vorzeichen kommt von der inneren Ableitung}$$

$$\frac{d}{dx}(-x) = -1$$

Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir die folgenden Abkürzungen ...

$$\begin{aligned} S &= \text{Sin}[\omega_d t + \varphi_0] & S' &= \omega_d C \\ C &= \text{Cos}[\omega_d t + \varphi_0] & C' &= -\omega_d S \\ E &= e^{-\delta t} & E' &= -\delta E \end{aligned}$$

Mit diesen Abkürzungen folgt ...

$$(2) \quad y[t] = \dot{y}^* S E$$

$$(3) \quad \dot{y}[t] \stackrel{(A)}{=} \dot{y}^* \frac{d}{dt}(S E) \stackrel{(E)}{=} \dot{y}^* (S' E + S E') = \dot{y}^* (\omega_d C E - \delta S E) = \dot{y}^* (\omega_d C - \delta S) E$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \ddot{y}[t] &= \dot{y}^* \frac{d}{dt} (\omega_d C E - \delta S E) = \dot{y}^* (\omega_d C' E + \omega_d C E' - \delta S' E - \delta S E') \\ &= \dot{y}^* (-\omega_d^2 S E - \delta \omega_d C E - \delta \omega_d C E + \delta^2 S E) \\ &= \dot{y}^* (-\omega_d^2 S - \delta \omega_d C - \delta \omega_d C + \delta^2 S) E \end{aligned}$$

Es ist nun nicht so schwierig zu zeigen, dass die Differentialgleichung oben (1) erfüllt ist ...

$$\begin{aligned} &\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] \\ &= \dot{y}^* (-\omega_d^2 S - \delta \omega_d C - \delta \omega_d C + \delta^2 S) E \\ &\quad + 2\delta \left( \dot{y}^* (\omega_d C - \delta S) E \right) + \omega_0^2 \left( \dot{y}^* S E \right) \\ &= \dot{y}^* E (-\omega_d^2 S - \delta \omega_d C - \delta \omega_d C + \delta^2 S + 2\delta \omega_d C - 2\delta^2 S + \omega_0^2 S) \\ &= \dot{y}^* E (S(-\omega_d^2 S + \delta^2 S - 2\delta^2 S + \omega_0^2 S) + C(-\delta \omega_d C - \delta \omega_d C + 2\delta \omega_d C)) \\ &= \dot{y}^* E S ((-\omega_d^2 + \delta^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2) + C(0)) \end{aligned}$$

$$\text{Wir erinnern uns, dass } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \text{ bzw. } \omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$= \dot{y}^* E S (-\omega_0^2 + \delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2)$$

$$= \dot{y}^* E S * (0)$$

$$= 0$$

QED

## Aperiodischer Grenzfall

Wir zeigen nun, dass die allgemeine Lösung für den aperiodischen Grenzfall ( $\delta = \omega_0$ ) ...

$$y[t] = (y_1^* + y_2^* t) e^{-\delta t}$$

die Schwingungsdifferentialgleichung...

$$\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

erfüllt.

Wir verwenden die folgenden Abkürzungen ...

$$\begin{aligned} L &= y_1^* + y_2^* t & L' &= y_2^* \\ E &= e^{-\delta t} & E' &= -\delta E \end{aligned}$$

und erhalten ...

$$(2) \quad y[t] = L E$$

$$(3) \quad \dot{y}[t] = \frac{d}{dt} (L E) = (L' E + L E') = y_2^* E - \delta L E$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \ddot{y}[t] &= \frac{d}{dt} (y_2^* E - \delta L E) = y_2^* E' - \delta L' E - \delta L E' = -\delta y_2^* E - \delta y_2^* E + \delta^2 L E \\ &= (-2\delta y_2^* + \delta^2 L) E \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun, ob dies die Differentialgleichung erfüllt ...

$$\begin{aligned} \ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] &= (-2\delta y_2^* + \delta^2 L) E + 2\delta (y_2^* E - \delta L E) + \omega_0^2 (L E) \\ &= E (-2\delta y_2^* + \delta^2 L + 2\delta y_2^* - 2\delta^2 L + \omega_0^2 L) \\ &= E L (\delta^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2) \end{aligned}$$

Für den aperiodischen Grenzfall gilt  $\omega_0 = \delta$

$$= E L (\delta^2 - 2\delta^2 + \delta^2) = E L * (0) = 0$$

QED

## Kriechfall

Wir zeigen nun, dass die allgemeine Lösung für den Kriechfall (mit  $\omega'_d = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)}$ ) ...

$$y[t] = \overset{*}{y} \text{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] e^{-\delta t}$$

die Schwingungsdifferentialgleichung...

$$\ddot{y}[t] + 2\delta \dot{y}[t] + \omega_0^2 y[t] = 0$$

erfüllt.

Wir sehen, dass mit den folgenden Abkürzungen ...

$$\begin{array}{ll} S = \text{Sinh}[\omega'_d t + \varphi_0] & S' = \omega_d C \\ C = \text{Cosh}[\omega'_d t + \varphi_0] & C' = \omega'_d S \\ E = e^{-\delta t} & E' = \delta E \end{array}$$

ein ähnliches Vorgehen wie bei der gedämpften Schwingung resultiert. Die Unterschiede sind ...

$$\begin{array}{lll} \omega'_d = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} & \text{statt} & \omega_d = \sqrt{+(\omega_0^2 - \delta^2)} \\ \text{Cosh}' = \text{Sinh} & \text{statt} & \text{Cos}' = \text{Sin} \end{array}$$

# Anhang F      Strecken, Stauchen, Schieben, Spiegeln

## Einleitung

Der zentrale Punkt dieses Anhangs ist, die Bedeutung der verschiedenen Parameter in einer Funktion zu verstehen, insbesondere für die Schwingung ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Wie wird die Sinusfunktion  $\sin[t]$  verändert durch die obigen  $\hat{y}$ ,  $\varphi_0$  und  $\omega_0$ ?

Wir gehen bei der Analyse von einer beliebigen Funktion aus ...

$$f[x]$$

Aus dieser Funktion können wir  $\infty$  viele weitere erzeugen, indem wir sie in  $x$ - oder  $y$ -Richtung strecken, stauchen, verschieben oder spiegeln. Wie zeigt sich dies mathematisch?

Wir untersuchen insbesondere, wie für eine beliebige Funktion  $f[x]$  die Funktionsgraphen der folgenden Funktionen aussehen ...

$$f[x] \pm c$$

$$\pm c f[x]$$

$$f[x \pm c]$$

$$f[\pm c x]$$

Bei den folgenden Plots wird die unabhängige Variable  $x$  ...

in der Horizontalen ( $x$ -Richtung; nach rechts zunehmend) aufgetragen,

und der Funktionswert  $f[x]$  bzw die abhängige Variable  $y$

in der Vertikalen ( $y$ -Richtung; nach oben zunehmend) aufgetragen.

Wir nennen die Variable  $y$  abhängig, weil ihr Wert via  $y = f[x]$  von der Variablen  $x$  abhängt.

## Zusammenfassung aus der Merkhilfe

In der Mathematik Merkhilfe wird die Bedeutung der obigen wichtigen mathematischen Transformationen folgendermassen zusammengefasst:

### Addition und Multiplikation mit einer Konstanten $c > 0$

$f[x] \pm c$       ... ist die um den Wert  $c$  nach oben (+) bzw. nach unten (–) verschobene Funktion  $f[x]$ .

$\pm c f[x]$       ... ist die um den Faktor  $c$  vertikal gestreckte ( $c > 1$ ) bzw. gestauchte ( $c < 1$ ) Funktion  $f[x]$ .  
Mit dem negativen Vorzeichen findet zusätzlich noch eine Spiegelung an der  $x$ -Achse statt.

$f[x \pm c]$       ... ist die um den Wert  $c$  nach links (+) bzw. nach rechts (–) verschobene Funktion  $f[x]$ .

$f[\pm c x]$       ... ist die um den Faktor  $c$  horizontal gestauchte ( $c > 1$ ) bzw. gestreckte ( $c < 1$ ) Funktion  $f[x]$ . Mit dem negativen Vorzeichen findet zusätzlich noch eine Spiegelung an der  $y$ -Achse statt.

## Strecken, Stauchen, Schieben, Spiegeln in x- und y-Richtung

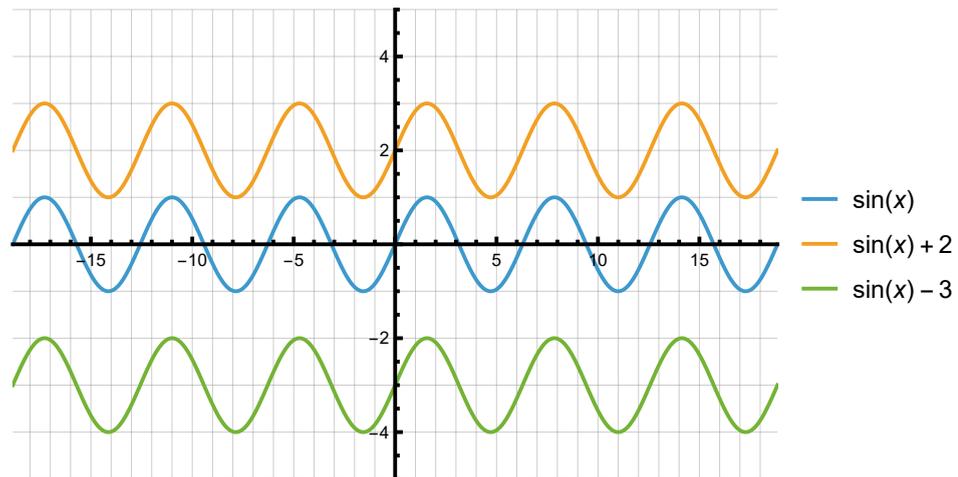
### Schieben in y-Richtung

$$f[x] + c$$

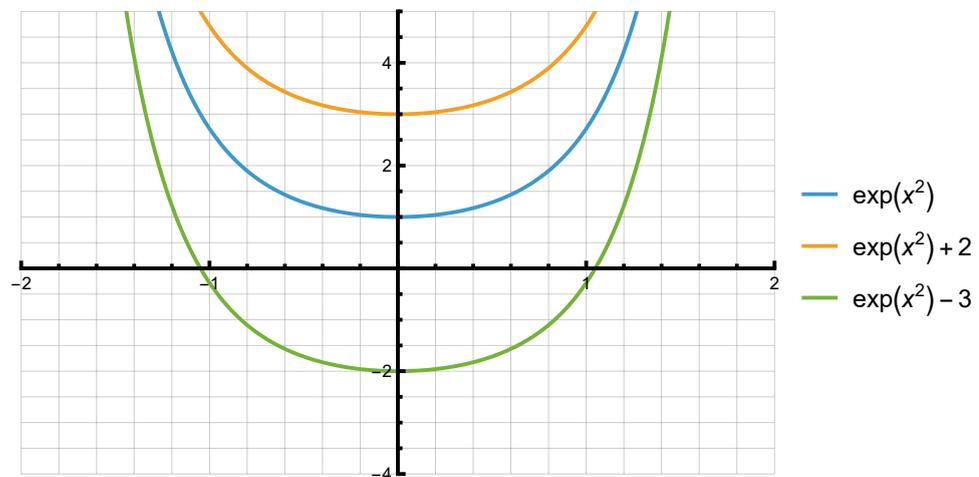
$f[x] + c$  schiebt den Funktionsgraphen in y-Richtung. Für  $c > 0$  gilt ...

$f[x] + c$  schiebt die Funktion um  $c$  nach oben.

$f[x] - c$  schiebt die Funktion um  $c$  nach unten.



**Abbildung** Schieben in y-Richtung



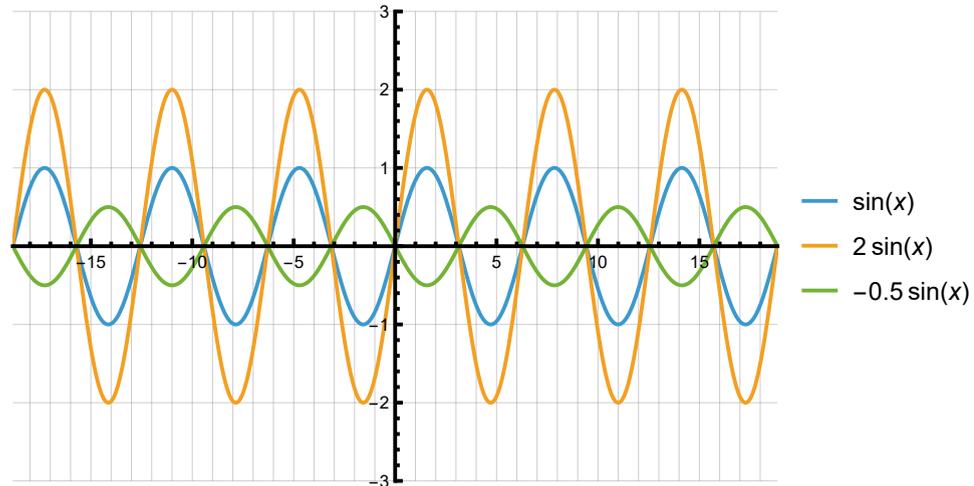
**Abbildung** Schieben in y-Richtung

## Strecken/Stauchen in $y$ -Richtung und Spiegeln

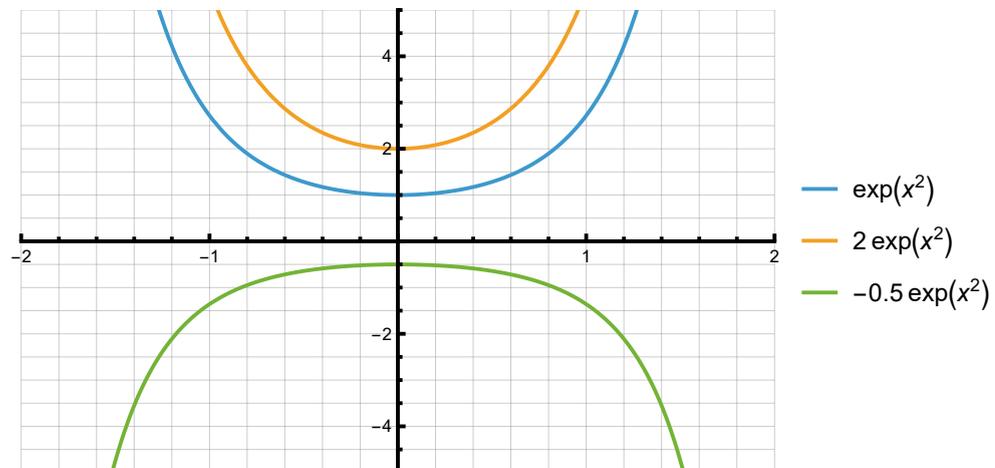
$$d * f[x]$$

$d * f[x]$  streckt/staucht den Funktionsgraphen in  $y$ -Richtung und spiegelt für  $d < 0$  den Funktionsgraphen auch noch an der  $x$ -Achse. Es gilt ...

$ d  > 1$	$d * f[x]$	streckt die Funktion in $y$ -Richtung mit dem Faktor $ d $ .
$ d  < 1$	$d * f[x]$	staucht die Funktion in $y$ -Richtung mit dem Faktor $ d $ .
$d < 0$	$d * f[x]$	spiegelt den Funktionsgraphen zusätzlich an der $x$ -Achse.



**Abbildung** Strecken/Stauchen in  $y$ -Richtung und Spiegeln an der  $x$ -Achse



**Abbildung** Strecken/Stauchen in  $y$ -Richtung und Spiegeln an der  $x$ -Achse

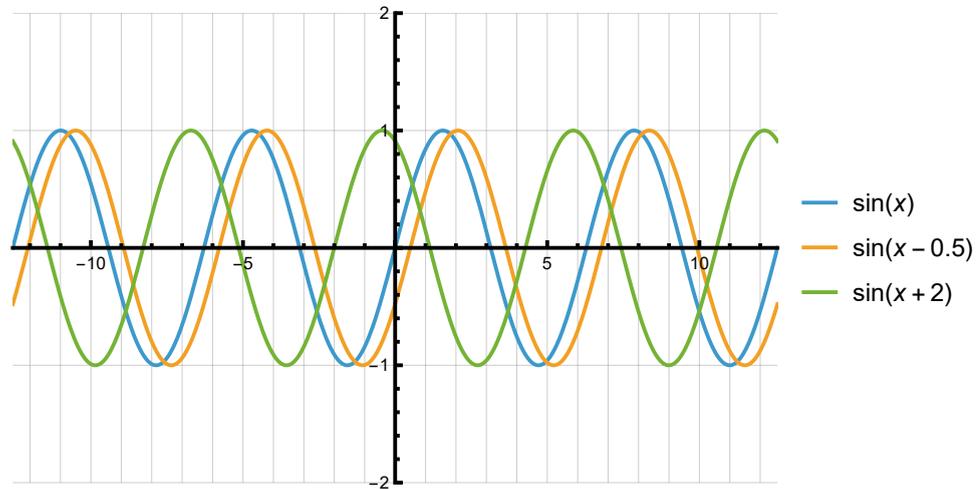
Schieben in  $x$ -Richtung

$f[x + b]$

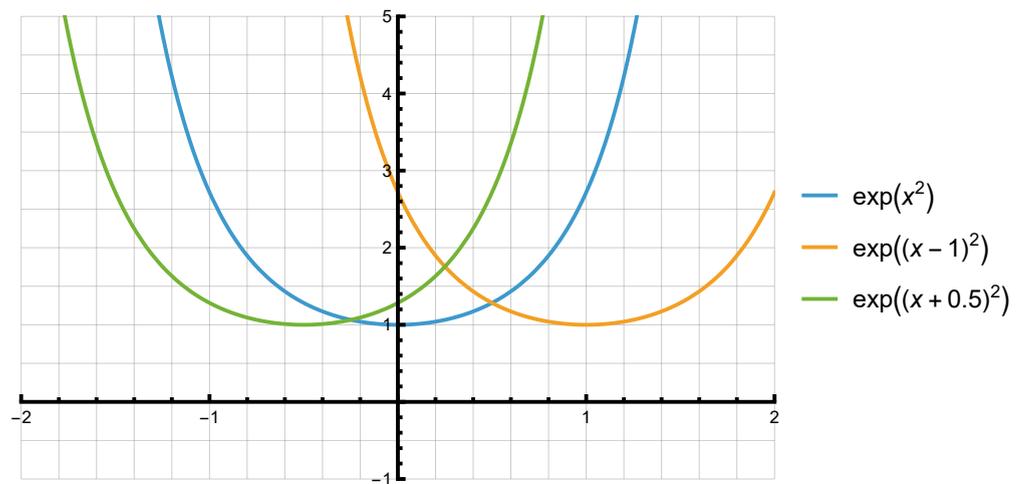
$f[x - b]$  schiebt den Funktionsgraphen in  $x$ -Richtung. Für  $b > 0$  gilt ...

$f[x - b]$  schiebt die Funktion um  $b$  nach rechts.

$f[x + b]$  schiebt die Funktion um  $b$  nach links.



**Abbildung** Schieben in  $x$ -Richtung



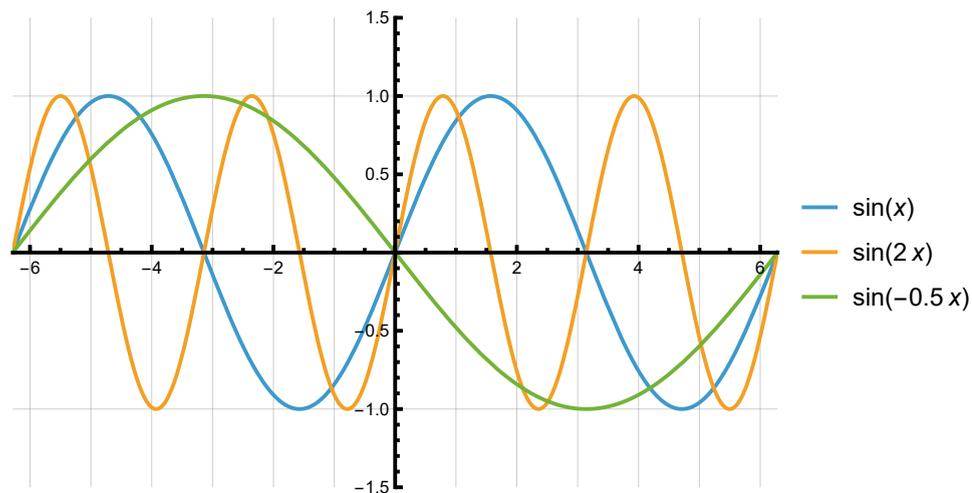
**Abbildung** Schieben in  $x$ -Richtung

## Strecken/Stauchen in x-Richtung und Spiegeln

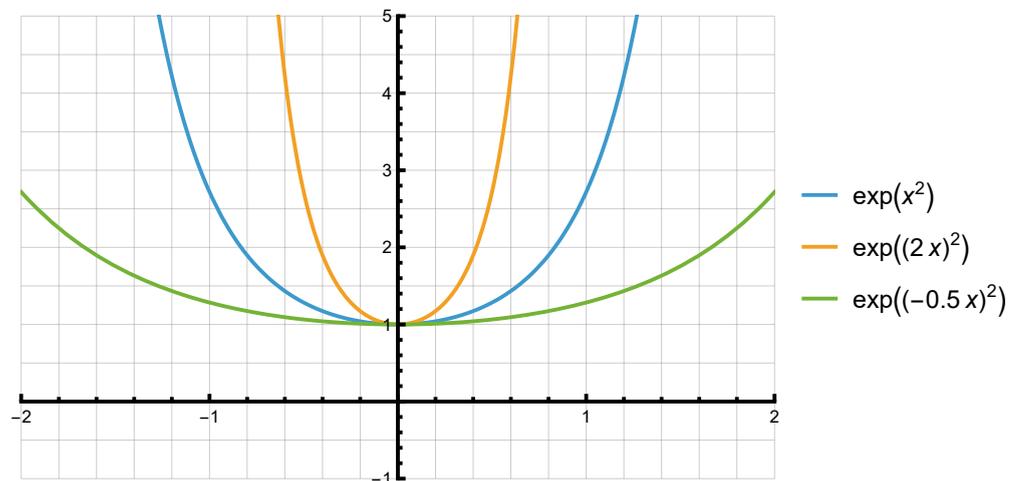
 $f[a x]$ 

$f[a x]$  streckt/staucht den Funktionsgraphen in x-Richtung und spiegelt für  $a < 0$  den Funktionsgraphen auch noch an der y-Achse. Es gilt ...

$ a  > 1$	$f[a x]$	staucht die Funktion in y-Richtung mit dem Faktor $ a $ .
$ a  < 1$	$f[a x]$	streckt die Funktion in y-Richtung mit dem Faktor $1/ a $ .
$a < 0$	$f[a x]$	spiegelt den Funktionsgraphen zusätzlich an der y-Achse.

 $|a|$ 


**Abbildung** Strecken/Stauchen in x-Richtung und Spiegeln an der y-Achse

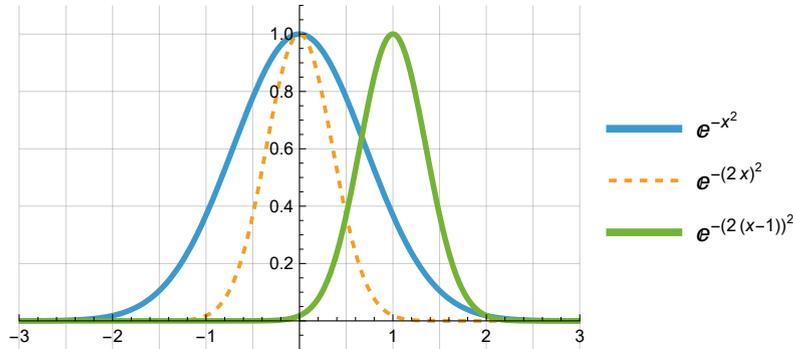


**Abbildung** Strecken/Stauchen in x-Richtung und Spiegeln an der y-Achse  
Da  $\exp(x^2)$  eine gerade Funktion ist, geht sie durch Spiegelung an der y-Achse in sich selbst über. Am Funktionsgraphen ändert sich nichts.

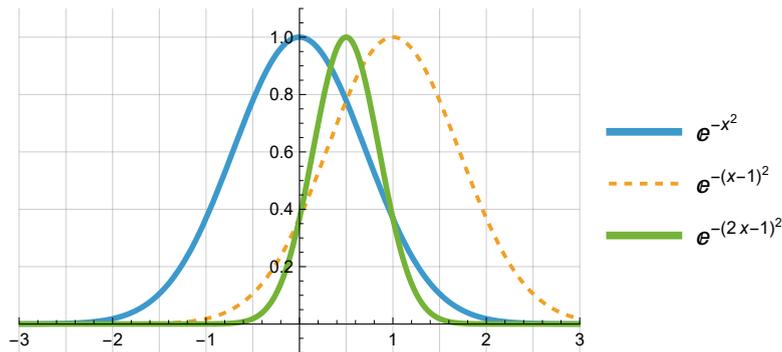
## Gleichzeitige Verschiebungen und Stauchungen

### Zusammengesetzte Verschiebungen/Stauchungen in x- und y-Richtung

Bei zusammengesetzten Verschiebungen/Stauchungen ist zu beachten, dass es auf die Reihenfolge der Verschiebungen ankommt. Wir zeigen dies hier für die x-Richtung. Für die y-Richtung gilt das Analoge.



**Abbildung** Ausgangsfunktion  $e^{-x^2}$   
 Stauchen in x-Richtung mit Faktor 2  $x \rightarrow 2x \rightarrow e^{-(2x)^2}$   
 Verschieben um 1  $x \rightarrow x-1 \rightarrow e^{-(2(x-1))^2}$



**Abbildung** Ausgangsfunktion  $e^{-x^2}$   
 Verschieben um 1  $x \rightarrow x-1 \rightarrow e^{-(x-1)^2}$   
 Stauchen in x-Richtung mit Faktor 2  $x \rightarrow 2x \rightarrow e^{-(2(x-1))^2}$

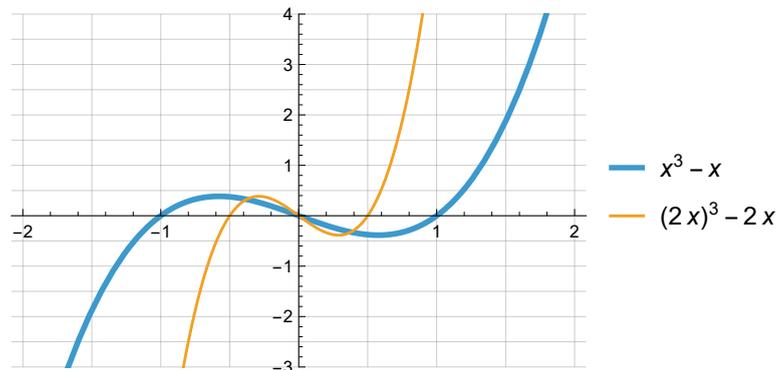
Wir sehen, dass unterschiedliche Endfunktionen resultieren:  $e^{-(2(x-1))^2}$  vs.  $e^{-(2x-1)^2}$

Wir könnten im zweiten Fall das gleiche Ergebnis wie im ersten Fall bekommen, wenn wir zuerst um 2 (nicht 1!) in x-Richtung verschieben und dann mit dem Faktor 2 stauchen. Dies sieht man auch, wenn man den obigen Ausdruck  $e^{-(2(x-1))^2}$  ausmultipliziert ...

$$e^{-(2(x-1))^2} = e^{-(2x-2)^2}$$

### Mehrfaches Vorkommen der unabhängigen Variablen $x$

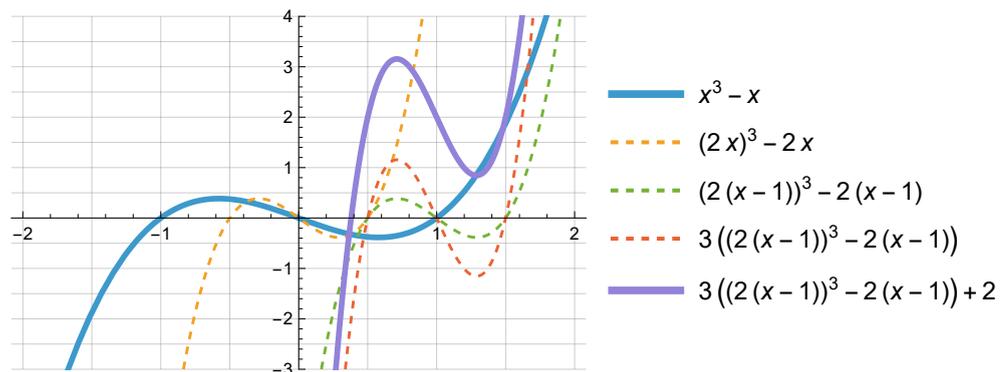
Wenn die Variable  $x$  in einer Funktion mehrfach vorkommt, müssen wir die Ersetzungen bei allen vorkommenden  $x$  durchführen. Dies zeigen wir im Folgenden für die Stauchung in  $x$ -Richtung für die Funktion  $f[x] = x^3 - x$ .



**Abbildung** Ausgangsfunktion  $x^3 - x$   
 Stauchung in  $x$ -Richtung  $x \rightarrow 2x$   $(2x)^3 - (2x)$

### Vier Schiebungen/Stauchungen in $x$ - und $y$ -Richtung für eine Polynomfunktion

Wir zeigen hier an einem Beispiel, wie sich der Funktionsgraph ändert, wenn nach und nach die geometrischen Transformationen durchgeführt werden.



**Abbildung** Ausgangsfunktion  $f[x] = x^3 - x$   
 $x \rightarrow 2x$  Stauchen um den Faktor 2 in  $x$ -Richtung  
 $x \rightarrow x - 1$  Verschieben um 1 nach rechts  
 $3f[x]$  Strecken mit dem Faktor 3 in  $y$ -Richtung  
 $f[x] + 2$  Verschieben um 2 nach oben  
 Endfunktion  $f[x] = 3(2(x-1))^3 - 2(x-1) + 2$

Wir sehen, dass sehr viele weitere Funktionen (bzw. Funktionsgraphen) mit Hilfe der obigen vier Transformationen erzeugt werden können.

## Anwendung auf Schwingungen

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Eine typische Schwingung kann in der folgenden Form geschrieben werden ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

Dabei gilt ...

- $\hat{y}$  ist die Amplitude (maximale Auslenkung). Dies kann eine Auslenkung (mit der Einheit Meter), ein Drehwinkel (mit der Einheit Radiant) oder eine andere physikalische Grösse sein.
- $\omega_0 t + \varphi_0$  ist die Phase bzw. der Phasenwinkel und wird in Radiant ausgedrückt.
- $\varphi_0$  ist der Nullphasenwinkel, d.h. die Phase zur Zeit  $t = 0$ .
- $\omega_0$  ist die Winkelgeschwindigkeit und wird in der Einheit Radiant / Sekunde angegeben.
- $t$  ist die Zeit mit der SI-Einheit Sekunde.
- Die Schreibweise  $\sin[t]$  macht keinen Sinn, da das Argument des Sinus ein Winkel (in rad oder °) sein muss.

Wir können eine Schwingung auch auf andere Arten beschreiben (mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ) ...

$$y[t] = \hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0] = \hat{y} \sin\left[\omega_0 \left(t + \frac{\varphi_0}{\omega_0}\right)\right] = \hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{\varphi_0}{2\pi} T\right)\right] = \hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{T} (t + t_0)\right]$$

$$\text{mit } t_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi} T \quad \text{bzw. } \frac{t_0}{T} = \frac{\varphi_0}{2\pi} \quad T \text{ entspricht } 2\pi$$

- Die erste Schreibweise  $\hat{y} \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$  ist dann sinnvoll, wenn in der Abszisse die Phase (in rad) aufgetragen wird.
- Die vierte Schreibweise  $\hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{T} (t + t_0)\right]$  ist dann sinnvoll, wenn in der Abszisse die Zeit aufgetragen wird.

Im folgenden gehen wir von der vierten Schreibweise aus und stellen die Bedeutung von  $\hat{y}$  und  $t_0$  anschaulich dar.

Wir starten mit der Funktion ...

$$f[t] = \sin\left[\frac{2\pi}{T} t\right]$$

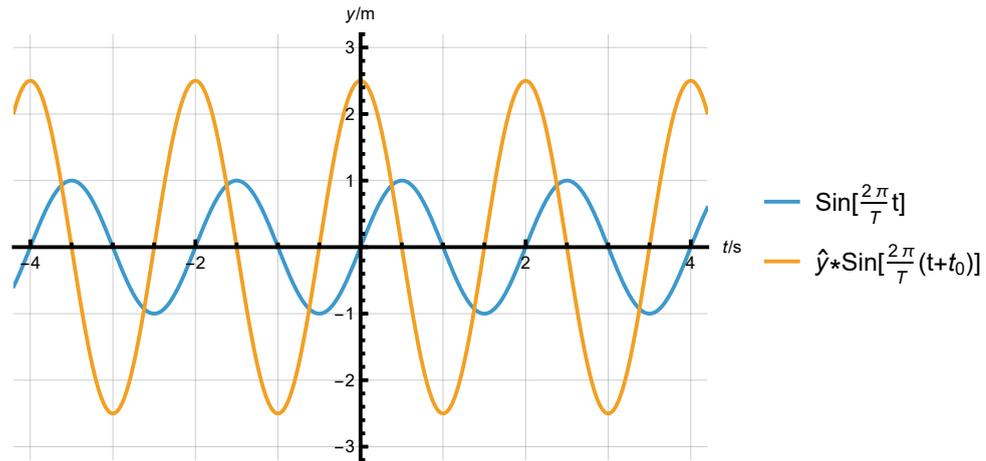
Je grösser die Periodendauer  $T$  ist, desto weiter auseinander sind die Maxima der Sinusfunktion bzw. desto mehr ist der Funktionsgraph in  $t$ -Richtung gestreckt.

Durch die Änderung...

$$t \rightarrow t + t_0$$

wird der Funktionsgraph um  $t_0$  nach links verschoben und durch Multiplikation mit  $\hat{y}$  wird der Funktionsgraph in  $y$ -Richtung gestreckt/gestaucht.

Wir erhalten den folgenden Funktionsgraphen für  $\hat{y} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t + t_0)\right]$  ...



**Abbildung** Ausgangsfunktion  $f[t] = \sin\left[\frac{2\pi}{T}t\right]$  mit  $T = 2$  s

- Horizontales Verschieben um  $t_0 = 0.5$  s
- Vertikales Strecken mit  $\hat{y} = 2.5$  m

Endfunktion  $\hat{y} * \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t + t_0)\right]$

Aus  $t_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi} T$  lässt sich dann auch die Phasenverschiebung  $\varphi_0$  berechnen.